PERİYODİK DELTASAL ÇEKİRDEK

12.1. TANIM. *I bir indis kümesi, λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $\lambda \in I$ parametresine bağlı, $2\pi-$periyotlu K_λ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa periyodik deltasal çekirdek adını alır:*

1. $K_\lambda(t)$ negatif olmayan, çift fonksiyondur. $\lambda \in I$ için $K_\lambda(0)$ sonlu ve $\lim_{\lambda\to\lambda_0} K_\lambda(0) = \infty$,
2. Her $\lambda \in I$ için $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_\lambda(t)\,dt = 1$,
3. Her $\delta > 0$ için $\lim_{\lambda\to\lambda_0} \sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t) = 0$.

12.2. UYARI. F_n Fejer çekirdeği bir periyodik deltasal çekirdektir.

Şimdi, $\{K_\lambda\}_{\lambda\in I}$ periyodik çekirdekleri ile, önce $f \in L^1_{2\pi}$ veya $f \in C[-\pi,\pi]$ için $f * K_\lambda$ konvolusyonu alınsın. $K_\lambda \in L^1_{2\pi}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|f * K_\lambda\|_{L^1_{2\pi}} &\leq \|f\|_{L^1_{2\pi}} \|K_\lambda\|_{L^1_{2\pi}}, \\ \|f * K_\lambda\|_C &\leq \|f\|_C \|K_\lambda\|_{L^1_{2\pi}} \end{aligned}$$

sağlanır. O halde,

$$T_\lambda : L^1_{2\pi} \to L^1_{2\pi} \text{ veya } T_\lambda : C[-\pi,\pi] \to C[-\pi,\pi]$$

olmak üzere, $T_\lambda(f) = f * K_\lambda$ operatörü alınabilir. Bu şekilde tanımlanan operatöre K_λ çekirdeğine karşılık gelen *konvolusyon operatör* denir. $\|K_\lambda\|_{L^1_{2\pi}} = 1$ olduğundan, T_λ sınırlıdır.

12.3. TEOREM. *K_λ periyodik bir deltasal çekirdek ve $T_\lambda(f) = f * K_\lambda$ ise $f \in C[-\pi,\pi]$ için*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|T_\lambda(f) - f\|_C = 0$$

gerçeklenir.

İspat. T_λ operatörü sınırlı, yani, $\|T_\lambda(f)\|_C \leq \|K_\lambda\|_{L^1_{2\pi}} \|f\|_C$ olduğu yukarıda gösterildi. $\varepsilon > 0$ verilsin. f $[-\pi,\pi]$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan, bu $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta > 0$ sayısı;

$$|t| < \delta \text{ iken } |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$$

durumu sağlanacak şekilde bulunur. Bu δ sabitlenerek

$$\begin{aligned}
\left|T_\lambda(f)(x)-f(x)\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x-t)-f(x)\right|K_\lambda(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|<\delta}+\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\right)\left|f(x-t)-f(x)\right|K_\lambda(t)\,dt
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Son eşitsizliğin iki tarafında $C[-\pi,\pi]$ nin normuna geçilerek,

$$\left\|T_\lambda(f)-f\right\|_C \leq \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}K_\lambda(t)\,dt+2\left\|f\right\|_C\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_\lambda(t)\,dt$$

bulunur. $K_\lambda(t)$ nın 3. özelliğinden, $\lambda\to\lambda_0$ için limite geçilerek

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|T_\lambda(f)-f\right\|_C=0$$

elde edilir.

12.4. TEOREM. *K_λ periyodik bir deltasal çekirdek ve $T_\lambda(f)=f*K_\lambda$ ise $f\in L^1_{2\pi}$ için*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|T_\lambda(f)-f\right\|_{L^1_{2\pi}}=0$$

gerçeklenir.

İspat. K_λ çekirdeğinin 1. ve 2. özelliklerinden

$$\begin{aligned}
\left\|T_\lambda(f)-f\right\|_{L^1_{2\pi}} &= \int_{-\pi}^{\pi}\left|T_\lambda(f)(x)-f(x)\right|dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)-f(x)\right]K_\lambda(t)\,dt\right|dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x-t)-f(x)\right|K_\lambda(t)\,dtdx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\lambda(t)\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x-t)-f(x)\right|dxdt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\lambda(t)\left\|f(\bullet-t)-f(\bullet)\right\|_{L^1_{2\pi}}dt
\end{aligned}$$

bulunur. f düzgün sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı;

$$|t| < \delta \text{ iken } \|f(\bullet - t) - f(\bullet)\|_{L^1_{2\pi}} < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde bulunabilir (yani, öteleme $L^1_{2\pi}$−normunda süreklidir). Buradan ve K_λ nın 3. özelliğinden

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(f) - f\|_{L^1_{2\pi}} &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{|t|<\delta} + \int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi}\right) K_\lambda(t)\,\|f(\bullet - t) - f(\bullet)\|_{L^1_{2\pi}}\,dt \\
&\leq \sup_{|t|<\delta}\|f(\bullet - t) - f(\bullet)\|_{L^1_{2\pi}} \\
&\quad +2\,\|f\|_{L^1_{2\pi}}\sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

12.5. ÖDEV. $K_\lambda \in C[-\pi,\pi]$ p*eriyodik bir deltasal çekirdek ve* f 2π−periyodik ve Riemann integrallenebilir olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun sürekli olduğu her x noktasında

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} T_\lambda(f)(x) = f(x)$$

yakınsamayı gösteriniz.

Özel durumda $T_\lambda = \sigma_n$ Fejer operatörlerinin dizisi alınırsa, f nin her süreklilik noktasında

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x)$$

sağlanır.