Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Tanım 1. Bir bilinmeyen fonksiyonun bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere adi diferensiyel denklem adı verilir.

Örnek 1.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x+5 \\ \frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y &= 0 \\ xy'''+y'-y &= \cos x \end{aligned}$$

denklemleri y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olmak üzere adi diferensiyel denklemlerdir.

Tanım 2. Bir bağımlı değişkenin bir ya da daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren deklemlere kısmi diferensiyel denklem denir. Örneğin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

bir kısmi türevli denklemdir. Bu derste adi diferensiyel denklemler ele alınacaktır.

Tanım 3. Bir diferensiyel denklemdeki en yüksek türevin basamağına diferensiyel denklemin basamağı ya da mertebesi adı verilir.

Tanım 4. Bir diferensiyel denklem, bağımlı değişken ve türevlerine göre polinom biçiminde (veya yazılabiliyor) ise, denklemdeki en yüksek türevin kuvvetine diferensiyel denklemin derecesi adı verilir.

Tanım 5. y nin bağımlı değişken, x in bağımsız değişken olduğu n-yincibasamaktan lineer diferensiyel denklem aşağıdaki formdadır:

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x) \tag{1}$$

Tanım 6. (1) diferensiyel denklemindeki $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ katsayılarından en az bir tanesi x-e bağlı ise, (1) denklemine değişken katsayılı lineer diferensiyel denklem denir. Katsayıların tamamı sabit ise, (1) denklemine sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem denir.

Tanım 7. (1) denkleminde $b(x) \equiv 0$ ise, (1) denklemine homogen diferensiyel denklem, aksi durumda homogen olmayan diferensiyel denklem denir.

Örnek 2. Aşağıdaki denklemleri sınıflandırınız.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0 \tag{2}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}+x^3\frac{d^3y}{dx^3}-xe^xy=\sin x \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - y^2 = 0 \tag{4}$$

$$(\frac{d^4y}{dx^4})^2 + x^3(\frac{d^3y}{dx^3})^3 - xe^x y = \sin x \tag{5}$$

Çözüm. (2) denklemi, 2. basamaktan sabit katsayılı lineer homogen diferensiyel denklemdir.
(3) denklemi, 4. basamaktan değişken katsayılı lineer homogen olmayan diferensiyel denklemdir.
(4) denklemi, 2. basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemdir, derecesi 1 dir.
(5) denklemi, 4. basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemdir, derecesi 2 dir.

Bir Diferensiyel Denklemin Çözümü

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{6}$$

n-yinci basamaktan diferensiyel denklemi ele alalım.

Tanım 8. $y = f(x)$ bir reel I aralığında tanımlı ve n. mertebeden türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in I$ için $y = f(x)$ fonksiyonu (6) diferensiyel denklemini sağlarsa, f fonksiyonuna (6) nın bir çözümüdür denir.

Tanım 9. (6) diferensiyel denkleminin bütün çözümlerini barındıran ve n tane keyfi sabit içeren bir çözüme (6) nın genel çözümü denir.

Tanım 10. Genel çözümden keyfi sabitlere özel değer verilerek elde edilen çözümlere özel çözüm adı verilir.

Tanım 11. Genel çözümden keyfi sabitlere değer verilerek elde edilemeyen ancak denklemi sağlayan çözümlere aykırı (tekil) çözüm adı verilir.

Örnek 3.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0 \tag{7}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $f(x) = (x + c)^2$, c keyfi sabit, fonksiyonunun (7) denklemini sağladığı kolayca görülebilir. $f(x)$ fonksiyonu (7) nin genel çözümünü ifade eder. $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = (x + 1)^2, ...$ fonksiyonları (7) denkleminin özel çözümleridir. Ayrıca $y = 0$ fonksiyonu (7) denklemini sağladığı halde genel çözümden elde ediliemez. Dolayısıyla $y = 0$ aykırı çözümdür.

Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri

Tanım 12. Bir diferensiyel denklemle birlikte koşullar bağımsız değişkenin tek bir değerinde veriliyorsa, diferensiyel denklemle birlikte koşula ya da koşullara başlangıç değer problemi adı verilir. Eğer diferensiyel denklemle birlikte koşullar bağımsız değişkenin birden fazla noktasında veriliyorsa, bu problem bir sınır değer problemi olarak adlandırılır.

Örnek 4.

$$y'' + 2y' - y = e^x, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

bir başlangıç değer problemidir.

$$y'' + 2y' - y = e^x, \; y(0) = 0, \; y'(1) = 1$$

bir sınır değer problemidir.

Çözümlerin Varlık ve Tekliği

$f(x, y)$ fonksiyonu $xy-$düzleminin (x_0, y_0) noktasını içeren bir bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0 \tag{8}$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Teorem 1. f fonksiyonu bir dikdörtgensel

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, \;\; |y - y_0| \leq b\}$$

bölgesinde sürekli ise, bu durumda (8) başlangıç değer problemi $|x - x_0| < h$ aralığında en az bir çözüme sahiptir.

Teorem 2. f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları bir dikdörtgensel

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, \;\; |y - y_0| \leq b\}$$

bölgesinde sürekli ise, bu durumda (8) başlangıç değer problemi $|x - x_0| < h$ aralığında bir tek çözüme sahiptir.

Örnek 5.

$$y' = xy^{1/2}, \; y(0) = 0 \tag{9}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. $f(x, y) = xy^{1/2}$ fonksiyonu $(0, 0)$ ı içeren bölgede sürekli olduğundan (9) başlangıç değer problemi bir $|x| < h$ aralığında en az bir çözüme sahiptir, burada h pozitif bir sabittir.

Örnek 6.

$$y' = x^3 + xy^3, \; y(2) = 1 \tag{10}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. $f(x, y) = x^3 + xy^3$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2$ fonksiyonları $(2, 1)$ noktasını içeren bir bölgede sürekli olduklarından (10) başlangıç değer problemi bir $|x - 2| < h$ aralığında bir tek çözüme sahiptir, burada h pozitif bir sabittir.

Diferensiyel Denklemlerin Elde Edilmesi

$$f(x, y, c) = 0 \tag{11}$$

bağıntısı ile verilen bir parametreli eğri ailesini göz önüne alalım. c parametresini sabit tutarak (11) bağıntısının $x-$e göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{12}$$

denklemi elde edilir. (11) ve (12) denklemleri arasından c parametresi yok edilerek birinci basamaktan

$$F(x, y, y') = 0$$

biçiminde birinci basamaktan diferensiyel denklem elde edilir.

Uyarı. Verilen eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi bulmak için eğri ailesinin içerdiği parametre sayısı kadar türev alınıp, parametreler yok edilir.

Örnek 7. $y = cx^2 - 4$ eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi bulunuz.

Çözüm. Verilen bağıntının her iki yanının $x-$e göre türevi alınırsa

$$y' = 2cx$$

elde edilir. Buradan $c = y'/2x$ olup verilen bağıntıda yerine yazılırsa,

$$xy' - 2y = 8$$

birinci basamaktan diferensiyel denklem elde edilir.

Örnek 8. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi bulunuz.

Çözüm. Verilen bağıntının her iki yanının $x-$e göre iki kez türevi alınırsa

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

ve

$$y'' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$$

denklemleri elde edilir. c_1 ve c_2 parametrelerini yok etmek için verilen denklem ile son elde edilen denklem taraf tarafa toplanırsa istenen diferensiyel denklem

$$y'' + y = 0$$

bulunur.