2. Homogen Diferensiyel Denklemler

Homogen Fonksiyon: Eğer bir *f(x,y)* fonksiyonu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

şeklinde yazılabiliyorsa, *f* fonksiyonuna n-yinci dereceden homogen fonksiyon adı verilir.

Örnek 1. $f(x,y) = 3x + 5y$ fonksiyonu x ve y'ye gore 1. dereceden homogen bir fonksiyondur;

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 3\lambda x + 5\lambda y \\ &= \lambda(3x + 5y) \\ &= \lambda f(x,y) \end{aligned}$$

Örnek 2. $f(x,y) = x^2 + 5xy - 3y^2$ fonksiyonu x ve y'ye gore 2. dereceden homogen bir fonksiyondur;

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^2 x^2 + 5\lambda^2 xy - 3\lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^2(3x^2 + 5xy - 3y^2) \\ &= \lambda^2 f(x,y) \end{aligned}$$

Homogen Diferensiyel Denklem

Eğer

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

denkleminde P ve Q aynı dereceden homogen fonksiyonlar ise, bu durumda verilen diferensiyel denklem homogen diferensiyel denklem adını alır. Bu özelliğe sahip her denklem

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan bu biçimde yazılabilen her denklem de homogen diferensiyel denklemdir. Homogen diferensiyel denklemin bu özelliği çözüm yöntemini de beraberinde getirir. *v=v(x)* olmak üzere

$$\begin{aligned} y &= xv \\ y' &= v + xv' \end{aligned}$$

konumu denkleme uygulanırsa, verilen denklem değişkenlerine ayrılabilen bir denkleme indirgenir.

Örnek 3. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$$
$$= f\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklinde yazılabildiğinden verilen denklem homogen bir diferensiyel denklemdir.

$$y = xv$$
$$y' = v + xv'$$

denklemde yerine yazılırsa,

$$v + xv' = \frac{\sqrt{x^2 - x^2 v^2} + xv}{x}$$
$$= \sqrt{1 - v^2} + v$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{dx}{x}$$

değişkenlerine ayrılabilen denklem elde edilir. Bu denklemin her iki yanının integrali hesaplanırsa, değişkenlerine ayrılabilen denklemin çözümü

$$arcsinv = lnx + lnc$$
$$v = sin(lncx)$$

bulunur.

$$v = \frac{y}{x} \Longrightarrow$$

$$y = xsin(lncx)$$

homogen denklemin çözümü elde edilir.

Örnek 4. $xy' = y(lny - lnx)$denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem

$$y' = \frac{y}{x} ln \frac{y}{x}$$

şeklinde yazılabildiğinden homogendir.

$$y = xv$$
$$y' = v + xv'$$

denklemde yerlerine yazılırsa

$$x\frac{dv}{dx} = vlnv - v$$

denklemi elde edilir. Bu denklem değişkenlerine ayrılırsa

$$\frac{dv}{vlnv - v} = \frac{dx}{x}$$

elde edilir. Sol taraftaki integral için $lnv = z$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{dz}{z - 1} = \frac{dx}{x}$$

elde edilir. Her iki yanın integrali hesaplanıp değişkenler yerlerine yazılırsa, verilen denklemin genel çözümü

$$y = xe^{cx+1}$$

bulunur.