8. Riccati Deferensiyel Denklemi

Tanım.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) + g(x)\,y + h(x)\,y^2 \tag{1}$$

formundaki diferensiyel denklemlere birinci basamaktan Riccati diferensiyel denklemi denir.

Uyarı. (1) denkleminde $h(x) \equiv 0$ ise denklem lineer diferensiyel denklem, $f(x) \equiv 0$ ise denklem Bernoulli deferensiyel denklemidir. f, g ve h sabit ise, (1) denklemi değişkenlerine ayrılabilirdir.

Eğer Riccati denkleminin bir $y_1(x)$ özel çözümü biliniyorsa,

$$y = y_1(x) + \frac{1}{w(x)}$$

dönüşümü ile denklem

$$\frac{dw}{dx} + [g(x) + 2h(x)\,y_1(x)]w + h(x) = 0$$

lineer diferensiyel denklemine indirgenir.

Örnek.

$$\frac{dy}{dx} = 3 + 3x^2y - xy^2$$

Riccati diferensiyel denkleminin bir özel çözümü $y_0(x) = 3x$ dir.

$$y = 3x + \frac{1}{w(x)}$$

dönüşümünü uygularsak, denklem

$$\frac{dw}{dx} - 3x^2w - x = 0$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{-x^3}$$

olup lineer diferensiyel denklemin genel çözümü

$$w(x) = e^{x^3}\left(\int e^{-x^3}x\,dx + c\right)$$

olarak elde edilir. Verilen Riccati denkleminin çözümü de

$$y(x) = 3x + \frac{1}{e^{x^3}\left(\int e^{-x^3}x\,dx + c\right)}$$

dir.

Örnek. Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin birer özel çözümü yanlarında verilmiştir. Bu denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

1)

$$y' = -2 - y + y^2, \; y_1(x) = 2.$$

2)

$$y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}, \; y_1(x) = \sin x.$$