9. Değişken Değiştirme Yöntemi ile Çözüm

Diferensiyel denklemi tanımlayamadığımız durumlarda denklemi çözmek için kullanılan bir yöntemdir.
Örneğin, $y' = \tan(x - y + 1)$ diferensiyel denkleminde

$$x - y + 1 = u$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$$

olup verilen denklem

$$\frac{du}{dx} = 1 - \tan u$$

denklemine indirgenir.ki bu denklem değişkenlerine ayrılabilir bir denklemdir ve çözümü kolaylıkla yapılabilir.

Örnek. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1)

$$y' = \cos(x - y + 5)$$

Çözüm.

$$x - y + 5 = u$$

dönüşümü uygulanırsa verilen denklem

$$\frac{du}{dx} = 1 - \cos u$$

değişkenlerine ayrılabilir denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümü

$$x + \cot u + \frac{1}{\sin u} = c$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla verilen deklemin çözümü

$$x + \cot(x - y + 5) + \frac{1}{\sin(x - y + 5)} = 5$$

şeklinde yazılabilir.

2)

$$y' + 1 = 4e^{-y} \sin x$$

Çözüm. Denklemde

$$-y = \ln u$$

değişken değiştirmesi yapılırsa, denklem

$$\frac{du}{dx} - u = -4u^2 \sin x$$

denklemine dönüşür ki bu denklem $n = 2$ için Bernoulli denklemidir. Bu Bernoulli denkleminin çözümü

$$\frac{1}{u} = 2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$$

dir. Böylece verilen denklemin çözümü

$$e^y = 2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$$

şeklinde bulunur.

3)

$$yy' + 1 = (x-1)\, e^{\frac{-y^2}{2}}$$

Çözüm. Denklemde

$$z = e^{y^2/2}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{dz}{dx} + z = (x-1)$$

lineer denklemi elde edilir. Lineer denklemin genel çözümü

$$z = x - 2 + ce^{-x}$$

ve verilen denklemin çözümü

$$e^{y^2/2} = x - 2 + ce^{-x}$$

dir.