Operatör Yöntemi (Kısa Yöntem)

Bu bölümde n-yinci basamaktan sabit katsayılı lineer diferensiyel

$$L(D)y = f(x) \qquad (1)$$

denkleminin bir özel çözümünün bulunması ele alınacaktır. Burada

$$L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

ve $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayıları verilmiş reel sabitlerdir.

(1) in bir özel çözümü

$$y_p = \frac{1}{L(D)} f(x)$$

dir. $f(x)$ in belli durumları için $\frac{1}{L(D)}$ operatörünün uygulama biçimleri aşağıda verilmektedir:

Teorem 1. $f(x) = e^{\alpha x}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{L(\alpha)} e^{\alpha x} \qquad L(\alpha) \neq 0$$

dır.

Örnek 1. $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}$

denkleminin bir özel çözümü

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 2D^2 - 5D + 6} e^{4x} = \frac{1}{18} e^{4x}$$

Uyarı. $L(\alpha) = 0$ ise o zaman,

$$\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \frac{1}{L(D + \alpha)}$$

dır.

Örnek 2. $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^{3x}$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 2D^2 - 5D + 6} e^{3x}$$

$$= \frac{1}{(D-3)(D-1)(D+2)} e^{3x}$$

$$= \frac{1}{D-3}\frac{1}{10}e^{3x}$$
$$= \frac{e^{3x}}{10}\frac{1}{D}\ 1$$

$$= \frac{1}{10}xe^{3x}$$

bulunur.

Teorem 2. $f(x) = p(x)$, k-yıncı dereceden bir polinom olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{L(D)}p(x) = (1 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots + b_k D^k)p(x)$$

dir.

Örnek 3. $(2D^2 + 2D + 3)y = x^2 + 2x - 1$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_p = \frac{1}{2D^2 + 2D + 3}(x^2 + 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{1 + \frac{2D^2+2D}{3}}(x^2 + 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{3}[1 - \frac{2D^2+2D}{3} + \left(\frac{2D^2+2D}{3}\right)^2 + \cdots](x^2 + 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{3}[1 - \frac{2}{3}D - \frac{2}{9}D^2 + \cdots](x^2 + 2x - 1)$$
$$= \frac{1}{3}[x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{3}(2x + 2) - \frac{2}{9}2]$$

$$= \frac{1}{3}[x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{25}{9}]$$

bulunur.

Teorem 3.

1) $f(x) = sin(ax + b)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{L(D^2)}sin(ax + b) = \frac{1}{L(-a^2)}sin(ax + b)\,, \qquad L(-a^2) \neq 0$$

2) $f(x) = cos(ax + b)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{L(D^2)}cos(ax + b) = \frac{1}{L(-a^2)}cos(ax + b)\,, \qquad L(-a^2) \neq 0$$

dir.

Örnek 4. $(D^2+4)y = sin3x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_p = \frac{1}{D^2+4} sin3x = \frac{1}{-9+4} sin3x = -\frac{1}{5} sin3x$$

Uyarı. $f(x) = sin(ax+b)$ için $L(-a^2) = 0$ ise, o zaman $sin(ax+b)$ yerine

$e^{i(ax+b)}$ konularak Teorem 1 uygulanır. En son elde edilen $y = u(x) + iv(x)$ ifadesinden $y_p = v(x)$ bulunur. $f(x) = cos(ax+b)$ durumunda $y_p = u(x)$ dir.

Örnek 5. $(D^2+4)y = cos2x + cos4x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_{p_1} = \frac{1}{D^2+4} cos4x = -\frac{1}{12} cos4x$$

$$y_{p_2} = \frac{1}{D^2+4} cos2x$$

$$= \frac{1}{D^2+4} e^{2ix}$$

$$= e^{2ix} \frac{1}{(D+2i)^2+4}$$

$$= e^{2ix} \frac{1}{D^2+4iD}$$

$$= e^{2ix} \frac{1}{D} \frac{1}{D+4iD}$$

$$= \frac{e^{2ix}}{4i} \frac{1}{D}$$

$$= \frac{xe^{2ix}}{4i}$$

$$= \frac{x}{4} sin2x + i(-\frac{x}{4} cos2x)$$

$$\Longrightarrow y_{p_2} = \frac{x}{4} sin2x$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$y_p = \frac{x}{4} sin2x - \frac{1}{12} cos4x$$

Teorem 4. $f(x) = e^{\alpha x} v(x)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{L(D)}e^{\alpha x}v(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{L(D+\alpha)}v(x)$$

dir.

Örnek 6. $(D-2)^2 y = e^{2x}\frac{1}{x^2}$ denkleminin bir özel çözümü

$$y_p = \frac{1}{(D-2)^2}e^{2x}\frac{1}{x^2} = e^{2x}\frac{1}{D^2}\frac{1}{x^2} = -e^{2x}lnx.$$

Örnek 7. $y'' + y = e^{2x}cosx$ denkleminin bir özel çözümü

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}e^{2x}cosx$$

$$= e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2+1}cosx$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D^2+4D+5}cosx$$

$$= e^{2x}\frac{1}{4D+4}cosx$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}(D-1)\frac{1}{D^2-1}cosx$$

$$= -\frac{e^{2x}}{8}(D-1)cosx$$

$$= -\frac{e^{2x}}{8}(-sinx - cosx)$$

$$= \frac{e^{2x}}{8}(sinx + cosx).$$