Yüksek Basamaktan Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemler

Bu bölümde n-yinci basamaktan lineer olmayan

$$f\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y^{'}, y, x\right) = 0 \tag{1}$$

denklemi incelenmektedir. Belirtelim ki burada ifade edilen bütün sonuçlar lineer denklemler için de geçerlidir.

1) Bağımlı Değişkeni İçermeyen Denklemler

$$f\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y^{'}, x\right) = 0 \tag{2}$$

denkleminde y bağımlı değişkeni yoktur.(2) diferensiyel denklemine

$$y^{'} = p \quad , \quad p = p\,(x)$$

konumu uygulanırsa

$$f\left(p^{(n-1)}, p^{(n-2)}, ..., p, x\right) = 0$$

şeklinde $(n-1)$-inci basamaktan bir denklem elde edilir.

Orijinal denklem

$$f\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y^{(k)}, x\right) = 0 \tag{3}$$

şeklinde ise, o zaman

$$y^{(k)} = p$$

dönüşümü yapılarak $(n-k)$-yıncı basamaktan

$$f\left(p^{(n-k)}, ..., p^{'}, p, x\right) = 0$$

denklemi elde edilir; yani (3)denkleminin basamağı k kadar azalmıştır.

Örnek 1.

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4 = 0 \tag{4}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. $y' = p$ ve $y'' = \dfrac{dp}{dx}$ olmak üzere (4) denklemi

$$2\frac{dp}{dx} - p^2 + 4 = 0$$

ya da

$$\frac{2dp}{p^2-4} = dx \tag{5}$$

şeklini alır. (5) denklemi integre edilirse,

$$p = 2\left(1 + \frac{2c_1e^{2x}}{1 - c_1e^{2x}}\right)$$

ve $y^{'} = p$ den (4) denkleminin çözümü

$$y = 2x - 2\ln\left(1 - c_1e^{2x}\right) + c_2$$

olarak bulunur.

Örnek 2.

$$(1 + 2x)\, y^{'''} + 4xy^{''} - (1 - 2x)\, y^{'} = e^{-x}$$

denklemini çözünüz.

2) Bağımsız Değişkeni İçermeyen Denklemler

Bir denklemde x bağımsız değişkeni içerilmiyorsa yani,

$$f\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y^{'}, y\right) = 0 \tag{6}$$

şeklinde ise, o zaman

$$y^{'} = p,\ \ p = p\,(y)\ \ ,$$

dönüşümü uygulanır. Bu durumda ilgili türevler

$$\begin{aligned} y^{''} &= \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \\ y^{'''} &= \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \\ & \quad ... \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve (6) da yerlerine konursa, basamak bir indirgenmiş olur. Örneğin, 3. basamaktan

$$yy^{'''} - y^{''}\left(y^{'}\right)^2 = 1$$

denklemi x değişkenini içermediği için

$$y^{'} = p,\ \ p = p\,(y)\,,$$

dönüşümü uygulanırsa, 2. basamaktan

$$yp^2\frac{d^2p}{dy^2} + py\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 - p^3\frac{dp}{dy} = 1$$

denklemi bulunur.

Örnek 3.

$$yy^{''} = 2\left(y^{'}\right)^2 - 2y^{'} \tag{7}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. (7) denklemi bağımsız değişkeni içermemektedir. $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ den,

$$p\left(y\frac{dp}{dy} - 2p + 2\right) = 0$$

olup buradan $p = 0$ ve dolayısıyla $y = c$ bir çözümdür. Diğer taraftan

$$\frac{dp}{p-1} = 2\frac{dy}{y}$$

integre edilirse

$$p = A^2y^2 + 1$$

elde edilip $\dfrac{dy}{dx} = p$ den

$$Ay = \tan(Ax + B)$$

çözümü bulunur.