İkinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemlerin Serisel Çözümleri

Bu bölümde çeşitli uygulamalarda karşımıza çıkan fakat elemanter fonksiyonlar yardımıyla çözülemeyen ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklem

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \tag{1}$$

sınıfı ele alınacaktır; burada $p_0,\ p_1$ ve p_2 ortak çarpanları bulunmayan polinomlardır. (1) denkleminin çözümleri genellikle elemanter fonksiyonlar cinsinden yani kapalı formda bulunamaz. Bu nedenle, (1) in serisel formda çözümleri aranır.

Tanım 1. $p_0(x) \neq 0$ olmak üzere $p_0(x),\ p_1(x)$ ve $p_2(x)$ fonksiyonları x_0 da analitik ise, x_0 noktasına (1) denkleminin bir adi noktası denir. Aksi durumda x_0 noktasına (1) in bir aykırı (singüler) noktası denir.

Tanım 2. $p_0(x) = 0$ olsun. $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)\dfrac{p_1(x)}{p_0(x)} \in \mathbb{R}$ ve $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2\dfrac{p_2(x)}{p_0(x)} \in \mathbb{R}$ ise o zaman x_0 aykırı noktasına düzgün aykırı nokta, aksi durumda düzgün olmayan aykırı nokta denir.

Örnek 1.

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)\,y = 0$$

Legendre denklemi için $x_0 = 1$ ve $x_0 = -1$ aykırı noktalarının düzgün olup olmadıklarına bakalım. $x_0 = 1$ için

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2} = 1 \in \mathbb{R}$$

ve

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \in \mathbb{R}$$

dir. O halde $x_0 = 1$ düzgün aykırı noktadır. Benzer şekilde $x_0 = -1$ in de düzgün aykırı nokta olduğu gösterilebilir.

Kuvvet Serisi Yöntemi

Teorem 1. x_0 noktası (1) denkleminin bir adi noktası olsun. Bu durumda (1) in her çözümü $x_0 - R < x < x_0 + R$ aralığında yakınsak olan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{2}$$

kuvvet serisi ile gösterilebilir. Başka bir ifadeyle (1) in genel çözümü

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \equiv a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

dir.

Örnek 1. $\left(1+2x^2\right)y''+6xy'+2y=0$ denkleminin genel çözümünü x in kuvvetleri cinsinden yazınız.

Çözüm. $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ formunda çözüm aranırsa ve denklem düzenlenirse

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+2(n+1)^2a_0\right]x^n\equiv 0$$

elde edilir. Buradan

$$a_{n+2}=-\frac{2(n+1)}{(n+2)a_n},\qquad n=0,1,2,...$$

genel indirgeme formülü elde edilir. Genel indirgeme formülü n sayısının tek ve çift olmasına göre düzenlenirse

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}a_0,\ n\geq 1,$$

ve

$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{4^nn!}{3.5.7.....(2n+1)}a_1,\ n\geq 1,$$

hesaplanır. Buradan verilen denklemin x_0 noktası komşuluğundaki serisel çözümü

$$\begin{aligned}y(x)&=a_0+a_1x+a_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}x^{2n}+a_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^nn!}{3.5.7.....(2n+1)}x^{2n+1}\\&=a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{n!}x^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^nn!}{\prod_{j=1}^{n}(2j+1)}x^{2n+1}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2. $y''-(x-1)y'+2y=0$ denkleminin genel çözümünü $x_0=2$ noktası komşuluğunda hesaplayınız.

Çözüm. $x_0=2$ noktası verilen denklem için bir adi noktadır. $t=x-2$ dersek, verilen denklem,

$$\frac{d^2y}{dt^2}-t\frac{dy}{dt}+2y=0$$

şeklini alır. Bu durumda $x_0=2$ adi noktası yani denklem için $t_0=0$ halini almıştır. Bu denklemin $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ şeklinde kuvvet serisi çözümü aranırsa,

$$y(t)=a_0\left(1-t^2\right)+a_1\left(t-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2.4.6....2n(2n-1)(2n+1)}t^{2n+1}\right)$$

elde edilir. Buradan da t yerine $x-2$ alınırsa verilen deklemin $x_0 = 2$ noktası komşuluğundaki serisel çözümü

$$y(x) = a_0 \left[1-(x-2)^2\right] + \left[x-2-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n+1}}{2.4.6.....2n.(2n-1)(2n+1)}\right]$$

şeklinde bulunur.

Homogen Olmayan Denklemler için Serisel Yöntem

$$p_0(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = \phi(x) \tag{3}$$

denklemi verilsin. Burada $p_0(x)$, $p_1(x)$ ve $p_2(x)$, (1) deki gibi ortak çarpanları olmayan polinomlar ve x_0 (3) denkleminin bir adi noktası olsun. $\phi(x)$ de bir polinom veya x_0 da Taylor serisine açılabilen bir fonksiyon olsun. (3) ün x_0 noktası civarındaki genel çözümü, $y = y_h + y_p$ dir. Burada y_h homogen denklemin genel çözümü, y_p de (3) denkleminin bir özel çözümüdür. Bu özel çözüm parametrelerin değişimi yöntemi yardımıyla hesaplanabilir.Alternatif olarak,. $\phi(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında Taylor serisine açıldıktan sonra kuvvet serisi yöntemi doğrudan (3) denklemine uygulanabilir. Bulunan özdeşlikten iki taraftaki $(x-x_0)^n$ terimlerinin katsayıları eşitlenir.

Örnek 3.

$$y'' - 2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2 \tag{4}$$

denkleminin genel çözümünü x in kuvvetleri cinsinden hesaplayınız.

Çözüm. $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve türevleri (4) de yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
a_2 &= 1,\ a_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} a_0,\ a_4 = \frac{1}{12} - \frac{a_1}{6}, \\
0 &= a_5 = a_8 = a_{11} = ... = a_{3n-1}, \qquad n = 2, 3, ... \\
a_{3n} &= \frac{2^{n-1}.1.4.7....(3n-5)}{6.9.12.....(3n).5.8.11.....(3n-1)} a_3, \qquad n = 2, 3, ... \\
a_{3n+1} &= \frac{2^{n-1}.2.5.8.....(3n-4)}{7.10.13.....(3n+1).6.9.12.....(3n)} a_4, \qquad n = 2, 3, ...
\end{aligned}$$

bulunur. Verilen homogen olmayan denklemin çözümü

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_{3n-1} x^{3n-1} + a_{3n} x^{3n} + a_{3n+1} x^{3n+1}\right]$$

şeklinde yazılır.