1.BÖLÜM: FONKSİYON DİZİ VE SERİLERİ

Bu bölümde aşağıdaki eşitliklerin ne zaman gerçekleneceğine cevap vereceğiz.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty}(f_n(x))\,dx$$

$$\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx$$

$$\lim_{x\to c}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to c}(f_k(x))$$

1.1.Fonksiyon Dizileri

Tanım 1.1.1: $D \subseteq \mathbb{R}$ ve $f(D) = \{f \mid f : D \to \mathbb{R}\}$ olsun.

$$s : \mathbb{N} \to f(D)$$

ile tanımlı s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir.

Örnek 1: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere. her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = x^n$ olsun. Bu tür diziler için iki tür yakınsaklıktan bahsedeceğiz; noktasal ve düzgün yakınsaklık.

Tanım 1.1.2 (Noktasal Yakınsaklık): (f_n)**,** D üzerinde bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her bir $x \in D$ için $(f_n(x))$ dizisi yakınsak ise (f_n), D üzerinde noktasal yakınsaktır denir.

Örnek 1' deki gibi diziyi tekrar ele alalım. Noktasal yakınsak olup olmadığını inceleyelim.

$$\forall x \in [0,1] \text{ için, } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$
$$= f(x).$$

O halde $[0,1]$ üzerinde $f_n \to f$ (noktasal) olur.

Tanım 1.1.2' ye dönersek , $D \subseteq \mathbb{R}$ kümesi ünzerinde,

$f_n \to f$ (noktasal)$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, her bir $x \in D$ için $\exists n_0$ öyleki $\forall n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sağlanır. Demek ki burada $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ olur.

Tanım 1.1.3 (Düzgün Yakınsaklık): $D \subseteq \mathbb{R}$ ve $f_n : D \to \mathbb{R}$ olsun. D kümesi üzerinde,

$f_n \to f$ (düzgün)$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \ni \forall n > n_0$ ve $\forall x \in D$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sağlanır. Demek ki $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sağlanır.

Burada n_0, sadece ε' a bağlıdır. Eğer D kümesi üzerinde $f_n \to f$ (düzgün) ise $f_n \to f$ (noktasal) olur.

Fakat bu önermenin karşıtı doğru değildir.

Örnek 2: $f_n : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ olsun.
(f_n) dizisi $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ aralığında düzgün yakınsak mıdır? Gösteriniz.

Çözüm: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ dır.
$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$
sağlanır. O halde $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde $f_n \to f = 0$ (noktasal) dır.
İddia ediyoruz ki $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde $f_n \to f = 0$ (düzgün) gerçeklenir.
Bunu görmek için $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ öyleki $\forall n > n_0$ ve $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

$\varepsilon > 0$ verilsin.
$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |x^n - 0| \\ &= |x^n| \\ &= x^n \\ &\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \tfrac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ öyleki $\forall n > n_0$ olduğunda $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$ gerçeklenir.

Gerçekten de,
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2^n} < \varepsilon &\Longrightarrow \tfrac{1}{\varepsilon} < 2^n \\ &\Longrightarrow \ln \tfrac{1}{\varepsilon} < \ln 2^n \\ &\Longrightarrow \ln 1 - \ln \varepsilon < n \ln 2 \\ &\Longrightarrow -\tfrac{\ln \epsilon}{\ln 2} < n \end{aligned}$$
Demekki, $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $n_0 = n_0(\varepsilon) = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$ seçersek $\forall n > n_0(\varepsilon)$ ve
$$\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}] \text{ için } \begin{aligned}[t] |f_n(x) - f(x)| &= |x^n| \\ &\leq \tfrac{1}{2^n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$
olduğundan $f_n \to f$ (düzgün) gerçeklenir.

Teorem 1.1.4: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ ve $f : D \to \mathbb{R}$ olsun.
O halde D üzerinde $f_n \to f$(düzgün) olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ olmasıdır.

Örnek 3: $f_n : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ olsun. (f_n) fonksiyon dizisi düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ dır.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$

$$\Longrightarrow f_n \to f \text{ (noktasal)}$$

O halde bu yakınsamanın düzgün olup olmadığını inceleyelim.
($f_n(x) = x^n$ artan bir fonksiyondur.)

$$c_n = \sup_{0\leq x\leq \frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0\leq x\leq \frac{1}{2}} x^n$$

$$= (\tfrac{1}{2})^n = \tfrac{1}{2^n} \to 0 (n \to \infty)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq \frac{1}{2}} |f_n(x) - 0| = 0$$

$\Longrightarrow f_n \to f$ (düzgün) olur.

Örnek 4: $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$ ile tanımlı fonksiyon dizisi düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: $x \in [-1, 1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x - \frac{1}{n})^2$
$= x^2 = f(x)$

$f_n \to f$ (noktasal).
$x \in [-1, 1]$ olmak üzere; $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |(x - \tfrac{1}{n})^2 - x^2| \\ &= |-\tfrac{2x}{n} + \tfrac{1}{n^2}| \\ &\leq \tfrac{2}{n}|x| + \tfrac{1}{n^2} \\ &\leq \tfrac{2}{n} + \tfrac{1}{n^2} \end{aligned}$$

O halde; $c_n := \sup\limits_{-1\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$, ($n \to \infty$ için)

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ olduğundan Teorem 1.1.4'ten $[-1, 1]$ aralığında $f_n \to f$(düzgün)

Sonuç 1.1.5: (f_k) dizisi D üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir $\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ ve (f_k)'nın bir (f_{n_k}) alt dizisi ve terimleri D kümesinden alınan bir (x_k) dizisi vardır öyle ki $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$ sağlanır.

Örnek 5: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (\frac{x}{n})$ ile tanımlı fonksiyon dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: $x \in \mathbb{R}$ verilsin. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x}{n}) = 0 = f(x)$ olup $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n \to f$ (noktasal) dır.

Eğer $\varepsilon = \frac{1}{2}$ seçersek; $n_k = k$ ve $x_k = k$ olmak üzere

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = |f_{n_k}(k) - 0| = \frac{k}{k} = 1 > \frac{1}{2}$$

dir. Sonuç 1.1.5'ten $\mathbb{R}$ üzerinde (f_n) dizisi $f_n \nrightarrow f$ (düzgün)

Teorem 1.1.6: $D \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) fonksiyon dizisi D üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer D üzerinde $f_n \to f$ (düzgün) ise f fonksiyonu D üzerinde süreklidir.

Örnek 6: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ ile tanımlı (f_n) fonksiyon dizisi $[0,1]$ aralığında sürekli midir?

Çözüm: $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases} = f(x)$$

$[0,1]$ aralığında $f_n \to f$ (noktasal).

Eğer $[0,1]$ aralığında $f_n \to f$ (düzgün) olsaydı Teorem 1.1.6'dan f limit fonksiyonu bu aralıkta sürekli olurdu. Fakat f fonksiyonu $x = 1$ de sürekli değildir. O halde (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir.

ÖDEV: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x - x^n$ ile tanımlı (f_n) fonksiyon dizisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak mıdır, neden?

Tanım 1.1.7 (Düzgün Cauchy Dizisi): $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ni \forall m, n \geq n_0$, $\forall x \in D$ için $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ gerçekleniyorsa (f_n) fonksiyon dizisine D üzerinde bir düzgün Cauchy dizisidir denir.

Teorem 1.1.8: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ olsun. D üzerinde, (f_n) bir düzgün Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart D üzerinde $f_n \to f$ (düzgün) olmasıdır.

Teorem 1.1.9: (f_n) fonksiyon dizisi bir I aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ve her bir f_n, I üzerinde sürekli olsun. O halde $F_n(x) = \int\limits_c^x f_n(t)dt$ eşitliği ile tanımlanan (F_n) dizisi, $F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$ şeklinde tanımlanan

F fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Örnek 7: $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F_n(x) = \frac{\ln(1+n^3x^2)}{n^2}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: Teorem 1.1.9'dan, $\frac{d}{dx}F_n(x) = F_n^{'}(x) = f_n(x)$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1+n^3x^2} .2xn^3$$

$$= \frac{2nx}{1+n^3x^2}$$

Her bir (f_n) nin $[0,1]$ aralığında sürekli olduğu açıktır.

$x \in [0,1]$ olmak üzere, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^3x^2} = 0 = f(x)$ olup $f_n \to f = 0$ (noktasal).

$$c_n := \sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0\leq x\leq 1} \frac{2nx}{1+n^3x^2}$$

$$= \max_{0\leq x\leq 1} \frac{2nx}{1+n^3x^2}$$

$f_n(0) = 0,\ f_n(1) = \frac{2n}{1+n^3}$ ve

n sabit olmak üzere, $\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{2n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2} = f_n^{'}(x)$

$$f_n^{'}(x) = 0 \Longrightarrow 1 - n^3x^2 = 0$$

$$\Longrightarrow x = n^{-\frac{3}{2}} \in [0,1]$$

$f_n(n^{-\frac{3}{2}}) = \frac{2n.n^{-(3/2)}}{1+n^3.\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ bulunur.

O halde; $c_n = \max\{0, \frac{2n}{1+n^3}, \frac{1}{\sqrt{n}}\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$ olup $I = [0,1]$ aralığı üzerinde $f_n \to f = 0$ (düzgün).

Teorem 1.1.9'un tüm kriterleri sağlandığına göre $F_n \to F$ (düzgün)

$F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt = 0 \Longrightarrow F_n \to F = 0$ (düzgün).