1.2.Düzgün Yakınsaklık ve İntegral

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ile tanımlı her bir (f_n) Riemann integrallenebilir olsun. Ayrıca $[a,b]$ aralığında $f_n \to f$ (noktasal) olsun.

O halde,

1) f integrallenebilir mi?

2) f integrallenebilir olduğunda

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

yazılabilir mi?

İleride göreceğiz ki bu iki sorunun cevabı da "hayır" olacaktır.

Örnek 8: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \\ 0 & ; \quad x \in [0,1]\backslash\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \end{cases}$

ile tanımlansın.

Her bir f_n, $[0,1]$ aralığında parçalı sürekli olduğundan integrallenebilirdir.

Her $x \in [0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in Q \\ 0 & ; \quad x \in \sim Q \end{cases} = f(x)$

$[0,1]$ üzerinde $f_n \to f$ (noktasal) sağlanır. Fakat f integrallenemeyen bir fonksiyondur.

Bu kısımda $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ eşitliğinin ne zaman gerçeklendiğini inceleyeceğiz.

Teorem 1.2.1: (f_n), $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların bir dizisi ve $f_n \to f$ (düzgün) olsun. O halde f fonksiyonu da $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olup

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f(x))dx \tag{1}$$

gerçeklenir.

Demekki düzgün yakınsaklık altında limit işlemi ile integral işlemi yer değiştirebilir.

1.3.Düzgün Yakınsaklık ve Türev

Her bir (f_n), $[a,b]$ aralığında türevli ve $f_n \to f$ (düzgün) olsa bile f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında türevli olması gerekmez.

$\frac{d}{dx}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{d}{dx} f_n(x))$ gerçeklenmek zorunda değildir.

Örnek 9: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere (f_n) düzgün yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de türevli midir?

Çözüm: n sabit olmak üzere,

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = f_n^{'}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} 2x$$

olup her bir f_n, $\mathbb{R}$ de türevlidir.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n}} \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$f_n \to f$ (noktasal).

$c_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2}|$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n}} - \sqrt{x^2} &= \frac{(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$0 \le c_n \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \Longrightarrow \mathbb{R}$ de $f_n \to f$ (düzgün).

(f_n) fonksiyon dizisinin yakınsadığı $f(x) = |x|$ ile tanımlı fonksiyon $x = 0$ da türevlenebilir değildir.

Teorem 1.3.1: Bir $I = [a, b]$ aralığında tanımlı (f_n) fonksiyonları bu aralık üzerinde sürekli türeve sahip olsun. Ayrıca I aralığında $f_n \to f$ (noktasal) ve $f_n^{'} \to g$ (düzgün) olsun. O halde I üzerinde $g = f'$ olmalıdır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))^{'}$$

gerçeklenir.

Teorem 1.3.2 (Weierstrass Yaklaşım Teorisi): $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde bu aralık üzerinde tanımlı öyle bir p polinomu vardır ki her $x \in [a, b]$ için $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir.

Sonuç 1.3.3 (Stone - Weierstrass Teoremi): Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise $[a, b]$ üzerinde öyle bir (P_n) polinom dizisi vardır ki $P_n \to f$ (düzgün) gerçeklenir.