2.2.Kuvvet Serilerinin Türev ve İntegrali

Teorem 2.2.1: Yakınsaklık yarıçapı R olan $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ kuvvet serisi $(a-R, a+R)$ aralığı tarafından içerilen her kapalı alt aralıkta sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaktır.

İspat: $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ olsun. O halde seri her $x \in [c,d]$ için yakınsaktır. Özel olarak c ve d uç noktalarında da yakınsaktır.

Şimdi;

$$v_k = \begin{cases} |c_k(d-a)^k & ; \quad |c-a| \leq |d-a| \\ |c_k(d-a)| & ; \quad |c-a| > |d-a| \end{cases}$$

tanımlayalım.

O halde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ pozitif terimli serisi yakınsaktır.

Diğer yandan her $x \in [c,d]$ için $|c_k(x-a)^k| \leq u_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ olduğundan Weierstrass kriterinden $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ kuvvet serisi $[c,d]$ kapalı alt aralığıda düzgün yakınsaktır.

Teorem 2.2.2: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. Ayrıca her $x \in (a-R, a+R)$ için $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ olsun. O halde $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ olmak üzere $[c,d]$ aralığında f Riemann integrallenebilir olup

$$\int\limits_c^d \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k\Big)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int\limits_c^d (x-a)^k dx$$

gerçeklenir. Aslında c ve d bu aralıkta keyfi olduğundan kuvvet serisi $(a-R, a+R)$ aralığı içinde terim terime integrallenebilirdir.

Örnek 5: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k.2^k}$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{(k+1).2^{k+1}}.k.2^k\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}.\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} < 1 \text{ (yakınsaktır)}\end{aligned}$$

$|x| < 1$ için $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ eşitliğinden yararlanacağız.

$[0, \frac{1}{2}] \subset (-1,1)$ olmak üzere her iki tarafın integralini alalım.

$$\int\limits_{0}^{1/2} (\sum_{k=0}^{\infty} x^k) dx = \int\limits_{0}^{1/2} \frac{1}{1-x} dx$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{0}^{1/2} x^k dx = \int\limits_{0}^{1/2} \frac{1}{1-x} dx$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_{0}^{1/2} = (-\ln|1-x|) \Big|_{0}^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)} = -(\ln\frac{1}{2} - \ln 1)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k.2^k} = \ln 2.$$

Teorem 2.2.3: Herhangi bir (c_k) dizisi için $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı, bu serinin terimlerinin türevinden oluşan $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k.c_k(x-a)^{k-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı aynıdır.

Teorem 2.2.4: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve de $\forall x \in (a-R, a+R)$ için $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ olsun. O halde f, $(a-R, a+R)$ aralığında türevlenebilir olup

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} c_k(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k.c_k(x-a)^{k-1} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Demek ki yakınsaklık aralığında kuvvet serileri terim terim türevlenebilir.

Örnek 6: $|x| < 1$ için $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ eşitliğinden yararlanarak $f(x) = \frac{1}{2+x}$ ile tanımlı f fonksiyonu için bir kuvvet serisi gösterimini elde ediniz.

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{x}{2})^n \; ; \; |-\frac{x}{2}| < 1$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n} \ ; \ |x| < 2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}} \ ; \ |x| < 2$$

Ödev: $|x| < 1$ için $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ eşitliğinden yararlanarak $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ile tanımlı f fonksiyonu için bir kuvvet serisi gösterimini elde ediniz.