4. BÖLÜM: GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

4.1.Giriş:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun integralini incelemiştik. Genel integrasyon aralığı ve/veya fonksiyonun sınırsız olması halinde integrali hesaplayamamıştık.

Bu bölümde bu tür integralleri inceleyeceğiz.

Bu integralleri de üç sınıfta toplayacağız.

a) İntegrasyon Aralığı Sınırsız ise;

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \quad , \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$$

benzeri integrallere 1. çeşit genelleştirilmiş integral diyeceğiz.

b) İntegrasyon Aralığı Sınırlı fakat f bu aralıkta sınırsız ise;

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad , \quad \int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$$

benzeri integrallere 2. çeşit genelleştirilmiş integral diyeceğiz (Yani f verilen aralıkta singüler noktaya sahip).

c) Yukarıdaki iki durum aynı anda sağlanıyor ise;

$$\int_0^\infty \frac{1}{x-1} dx \quad , \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x} dx$$

benzeri integrallere 3. çeşit genelleştirilmiş integral diyeceğiz.

A) 1. Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller

$\int_a^b f(x)\, dx$ integrali, her $t \geq a$ olmak üzere $[a,t]$ aralığında integrallenebilir olsun. O halde

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

Limiti mevcut ise verilen integral yakınsaktır denir ve değeri, limitin değeridir. Eğer limit mevcut değilse integral ıraksaktır denir. $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ integralide benzer şekilde incelenir.

Örnek 1:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx$$

integrali yakınsak mıdır?

Çözüm:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x} dx &= \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^t\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{e^t}+1\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

demek ki verilen integral yakınsak ve değeri 1'dir.

Örnek 2:

$$\int_0^\infty \sin x dx$$

integralini inceleyiniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \sin x dx &= \lim_{t\to\infty}\left(-\cos x\Big|_0^t\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(-\cos t+1\right)\end{aligned}$$

$t \to \infty$ için $\cos t$ bir limite sahip olmayıp $[-1, 1]$ aralığında salınım yapar. Dolayısı ile verilen integral ıraksaktır.

Ödev:

$$\int_0^\infty \frac{1+x}{1+x^2} dx \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

integrallerini inceleyiniz.

B) 2. Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller

$x = b$, f için yegane singüler nokta ve f, $[a, b)$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

limiti varsa verilen integral yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır denir.

Benzer şekilde $x = a,\ f$ için yegane singüler nokta ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a-\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

limiti varsa verilen integral yakınsaktır denir.

Örnek 3:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

integrali yakınsak mıdır?

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
(\ x = 1 \text{ singüler nokta}) \qquad &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\arcsin x \,\big|_0^{1-\varepsilon}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) \\
&= \arcsin 1 \\
&= \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$