

4.2. Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller İçin Yakınsaklık Testleri

Teorem 4.2.1.(Karşılaştırma Testi):

f ve g fonksiyonları $0 \leq f(x) \leq g(x)$ eşitsizliğini sağlasın.
O halde;

$$1) \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ yakınsak} \implies \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ yakınsak}$$

$$2) \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ ıraksak} \implies \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ ıraksaktır.}$$

Örnek 6: $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Karşılaştırma testinden; $\forall x \geq 1$ için $x^2 \geq x \implies -x^2 \leq -x \implies e^{-x^2} \leq e^{-x}$
 $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ integrali yakınsak olduğundan $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ integrali yakınsaktır.

Teorem 4.2.2.(Limit Kriteri):

$\forall x \geq 0$ için $f(x) \geq 0$ olsun ve $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = c$ olsun. O halde,

$$1) 0 \leq c < \infty \text{ ve } p > 1 \implies \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ yakınsak}$$

$$2) 0 < c \leq \infty \text{ ve } p \leq 1 \implies \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ ıraksaktır.}$$

Örnek 7: $\int_0^1 \frac{x^2}{3x^4 + 5} dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{x^2}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4 + 5} = \frac{1}{3}$$

$$c = \frac{1}{3}, p = 2 \implies \int_0^1 \frac{x^2}{3x^4 + 5} dx \text{ integrali yakınsaktır.}$$

Örnek 8: $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^1 \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^4 + x^2 + 1}} = 1$

$c = 1$ ve $p = 1$ olduğundan limit kriterinden verilen integral ıraksaktır.

4.3.İkinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller İçin Yakınsaklık Testleri

Teorem 4.3.1.(Karşılaştırma Kriteri):

Pozitif tanımlı f fonksiyonunun yegane singüler noktası b ve her $x \in [a, b)$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun.

O halde;

$$1) \int_a^b g(x) dx \text{ yakınsak} \implies \int_a^b f(x) dx \text{ yakınsak}$$

$$2) \int_a^b f(x) dx \text{ ıraksak} \implies \int_a^b g(x) dx \text{ ıraksaktır.}$$

Örnek 9: $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$$\text{Çözüm: } \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{1/3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{1/3}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/3}} dx$$

$p = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan sağdaki her iki integral yakınsaktır.

O halde verilen integral yakınsaktır.