

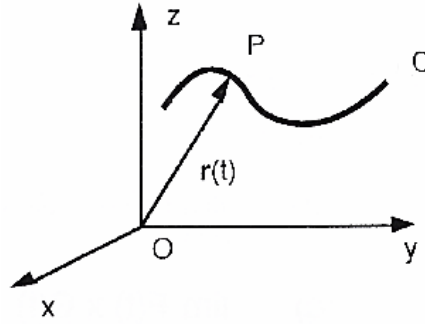
5.3 Eğriler

$D \subseteq \mathbb{R}$ ve $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere, $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $t \rightarrow r(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$

$$r(t) = X(t) \vec{i} + Y(t) \vec{j} + Z(t) \vec{k}; \quad a \leq t \leq b \quad (1^\circ)$$

süreklî fonksiyon olsun.

$t_0 \in [a, b]$ olmak üzere $P(X(t_0), Y(t_0), Z(t_0))$ noktasını elde ederiz.



$t_0, [a, b]$ aralığında P noktasından geçen uzayda bir C eğrisi çizer. Bu nedenle, (1°) 'deki denklem, uzayda bir eğri denklemi olarak alınır. Bu eğri denklemine eğrinin parametrik denklemi denir.

Eğrinin parametrik denklemini

$$\left. \begin{array}{l} X = X(t) \\ Y = Y(t) \\ Z = Z(t) \end{array} \right\} a \leq t \leq b \quad (2^\circ)$$

olarak alabiliriz. Hatta bu uzay eğri,

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ z = g(x) \end{array} \right\} a \leq x \leq b \quad (3^\circ)$$

olarak da verilebilir veya

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \quad (4^\circ)$$

şeklinde de verilebilir. (4°) 'deki denklemlerin her biri bir yüzey denklemdir. Uzayda iki yüzeyin kesişimi bir eğri verir.

Örnek 9: $r(t) = (x_0 + at) \vec{i} + (y_0 + bt) \vec{j} + (z_0 + ct) \vec{k}$ eğrisi uzayda ne belirtir?

$$x = x_0 + at \implies t = \frac{x - x_0}{a}$$

$$y = y_0 + bt \implies t = \frac{y - y_0}{b}$$

$$z = z_0 + ct \implies t = \frac{z - z_0}{c}$$

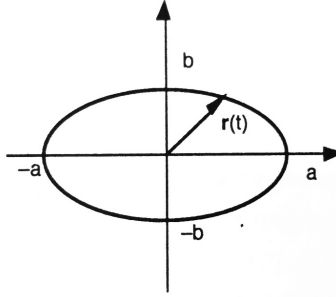
Burdan da $t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ elde edilir. Doğrultmanı (a, b, c) ve (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen bir doğru belirtir.

Örnek 10: $r(t) = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}$; $0 \leq t \leq 2\pi$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

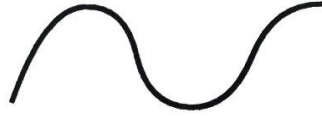
Çözüm: $x = a \cos t \implies \frac{x}{a} = \cos t$

$$y = b \sin t \implies \frac{y}{b} = \sin t$$

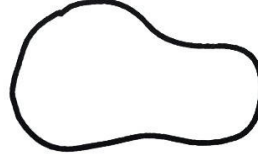
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \implies \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \text{ elde edilir.}$$



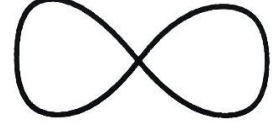
Tanım 5.3.1: Bir eğri kendi kendini kesmiyorsa bu eğriye basit eğri denir. Eğer bir eğri kendini kesiyorsa, kendisini kestiğinde oluşan noktalara katlı noktalar denir.



Basit Eğri



Basit Eğri



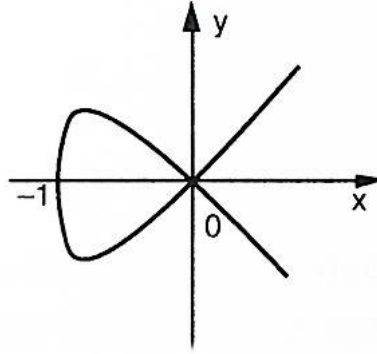
Basit Olmayan Eğri

Örnek 11: $r(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + (t^3 - t)\vec{j}$ eğrisi verilsin.

$$t = 1 \implies r(1) = (0i + 0j) = (0, 0)$$

$$t = -1 \implies r(-1) = (0i + 0j) = (0, 0)$$

sağlanır. O halde bu eğrinin katlı noktaları olup, basit olmayan eğridir.



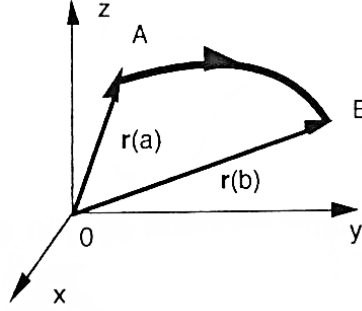
Eğrilerin Yönlendirilmesi

$r(t) = X(t)i + Y(t)j + Z(t)k$; $a \leq t \leq b$ eğrisi verilmiş olsun.

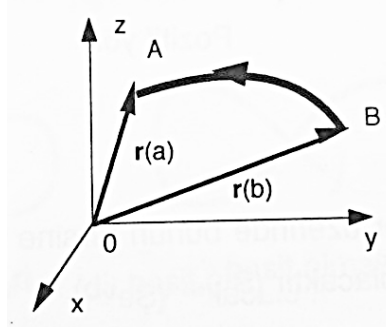
$$t = a \text{ için eğrinin başlangıç noktası } A$$

$$t = b \text{ için eğrinin bitiş noktası } B$$

olsun. A noktasından B noktasına gidilen yön pozitif yöndür.



B noktasından A noktasına gidilen yön negatif yöndür.



Örnek 12: $r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$; $0 \leq t \leq 2\pi$ eğrisinin grafiğini çiziniz ve yönünü belirleyiniz.

Çözüm: $\left. \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right\} x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \implies x^2 + y^2 = 1$

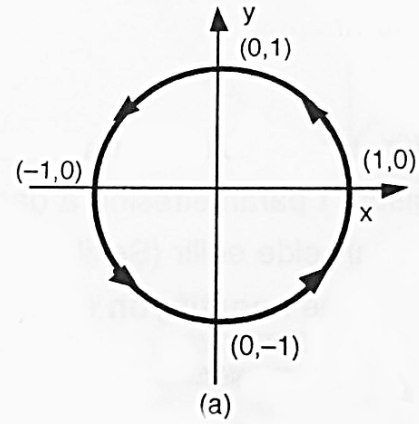
$t = 0 \implies P_1(1, 0)$ başlangıç noktası

$t = \frac{\pi}{2} \implies P_2(0, 1)$

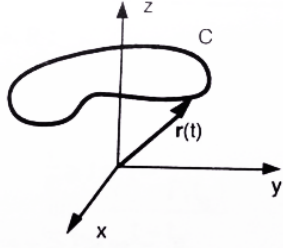
$t = \pi \implies P_3(-1, 0)$

$t = \frac{3\pi}{2} \implies P_4(0, -1)$

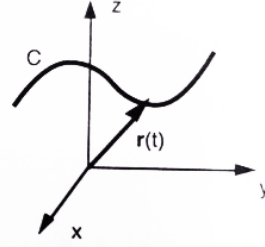
$t = 2\pi \implies P_5(1, 0) = P_1$



Tanım 5.3.2: Başlangıç ve bitim noktası çakışık olan eğrilere kapalı eğriler denir. O halde; C kapalı eğri $\iff C$ 'nin bir $r(t)$, $a \leq t \leq b$ parametrik gösterimi vardır öyle ki $r(a) = r(b)$ gerçekleşir.



(a)
Kapalı eğri



(b)
Kapalı olmayan eğri