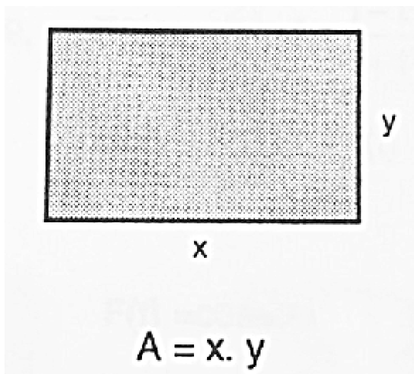
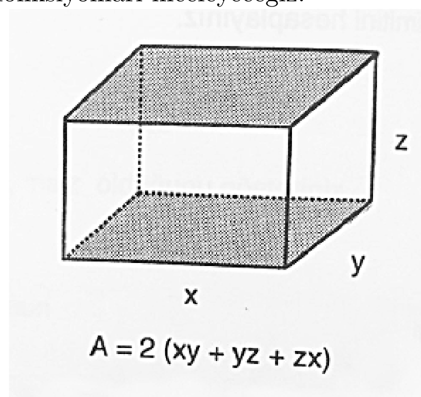
6. BÖLÜM: ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

6.1. Giriş

Şimdiye kadar reel değerli ve vektör değerli fonksiyonları inceledik. Şimdi aşağıda örnekleri verildiği gibi çok değişlenli fonksiyonları inceleyeceğiz.



$A = xy = A(x, y)$



$A = 2(xy + yz + xz) = A(x, y, z)$

Tanım 6.1.1: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\begin{array}{rll} f: & D & \to \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \to u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$

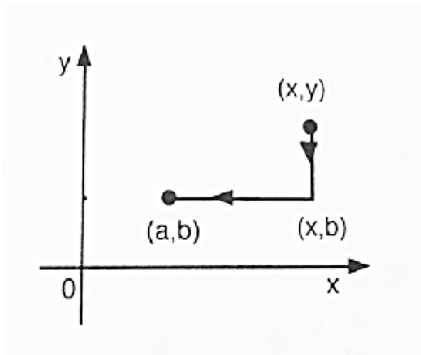
n değişkenli fonksiyondur.
$n = 1$ için tek değişkenli fonksiyondur.
$n \geq 2$ için çok değişkenli fonksiyondur.

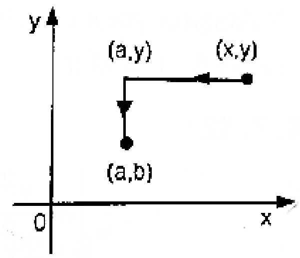
6.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik

Tanım 6.2.1: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $\begin{array}{rl} F: & D \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \to z = f(x, y) \end{array}$ fonksiyonu verilsin.

$(a, b) \in D'$ olmak üzere, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} F(x, y) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ \ni D$'nin (a, b) noktasının δ komşuluğundaki her (x, y) elemanı için $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ gerçeklenir.

Sonuç 6.2.2: $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, $(a, b) \in D'$ verilsin. O halde; $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0 \ \ni |x - a| < \delta$ ve $|y - b| < \delta$ özellikli $\forall (x, y) \in D$ için $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ sağlanır.





$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\} = L_1 \qquad\qquad \lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\} = L_2$$

Eğer, $\lim f(x,y) = L$ mevcut ise $L_1 = L_2 = L$ sağlanır. Diğer yandan L_1 ve L_2 mevcut ise $L_1 = L_2$ olsa bile (a,b) noktasında limit olmak zorunda değildir. Ayrıca L_1 ve L_2 mevcut fakat $L_1 \neq L_2$ ise o zaman $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ limiti mevcut değildir.

Örnek 1: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limiti mevcut mudur?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = L_1$

$\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\} = \lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right\} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 = L_2$

$L_1 = L_2 = 0$ sağlandı.

$y = mx$ doğruları boyunca $(0,0)$ noktasına yaklaşalım:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,xmx)\to(0,0)} \frac{xmx}{x^2+(xm)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} \\ &= \frac{m}{(1+m^2)} \end{aligned}$$

O halde m değiştikçe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ farklı değerler alır. Bu yüzden limit yoktur.

Tanım 6.2.3: $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $z = f(x,y)$ olsun. Ayrıca $(a,b) \in D$ verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \ni |x-a| < \delta$ ve $|y-b| < \delta$ olacak biçimde $\forall (x,y) \in D$ için $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$ ise f, (a,b) noktasında süreklidir.

Ayrıca $(a,b) \in D \cap D'$ olması halinde, f (a,b) noktasında sürekli $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ sağlanır.

Örnek 3: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli midir?

Çözüm: F fonksiyonu $(0,0)$ noktasında tanımlı olmadığından süreksizdir.