

### 6.3. Kısmi Türevler

**Tanım 6.3.1:**  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z = f(x, y)$  ve  $(a, b) \in D \cap D'$  olsun. Eğer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = L_1$$

limiti varsa  $F$ ,  $(a, b)$  noktasında  $x$  değişkenine göre kısmi türeve sahiptir.  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}$ ,  $f_x(a, b)$  notasyonlarından biri ile gösterilir. Eğer,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = L_2$$

limiti varsa  $f$ ,  $(a, b)$  noktasında  $y$ 'ye göre kısmi türeve sahiptir denir ve  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}$ ,  $f_y(a, b)$  notasyonlarından biri ile gösterilir.

**Örnek 4:**  $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$  fonksiyonu ve  $(1, 2)$  noktası verilsin.  $F_x(1, 2)$  ve  $F_y(1, 2)$  değerlerini bulunuz.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 2) - f(1, 2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 4 - 3(1+h)2 - (1+4-6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+h^2+4-6-6h+1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} = -4 = f_x(1, 2) \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1, 2+k) - f(1, 2)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1+(2+k)^2 - 3(2+k) - 1+4-6}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{5+4k+k^2-6-3k+1}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k(1+k)}{k} \\ &= 1 = f_y(1, 2) \end{aligned}$$

**Örnek 5:**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  eğer varsa  $f_x(0, 0)$  ve  $f_y(0, 0)$  değerlerini bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{h^2+0} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = \infty \end{aligned}$$

O halde  $f(x, y)$  fonksiyonu  $(0, 0)$  noktasında  $x$ 'e göre kısmi türeve sahip değildir.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{k^2+0} - 0}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0 = f_y(0, 0) \end{aligned}$$

**Örnek 6:**  $f(x, y, z) = \arcsin\left(\frac{xy}{z}\right)$  fonksiyonu için;

$$f_x(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{xy}{z}\right)^2}} \frac{y}{z}$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{xy}{z}\right)^2}} \frac{x}{z}$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{xy}{z}\right)^2}} xy \left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

türevleri birinci mertebeden kısmi türevlerdir.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

türevleri ise ikinci mertebeden kısmi türevlerdir.

**Örnek 7:**  $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$  fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden tüm kısmi türevlerini bulunuz.

$$f_x = e^{\frac{x}{y}} \quad \text{ve} \quad f_y = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$f_{xx} = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{1}{y^2}\right) + 0 \cdot e^{\frac{x}{y}}$$

$$f_{xy} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \frac{1}{y} + e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$f_{yy} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \left(-\frac{x}{y^2}\right) + e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{2x}{y^3}\right)$$

$$f_{yx} = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} \left(-\frac{x}{y^2}\right) + e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

**Tanım 6.3.2:** Eğer  $f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$  kısmi türevleri  $(a, b)$  noktasını içeren açık bir bölgede tanımlı ve  $(a, b)$  noktasında sürekli iseler

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

sağlanır.

**Örnek 8:**  $z = x^2 - y^2$  ise  $z_{xx} + z_{yy} = 0$  denklemini gerçekenir mi?

**Çözüm:**  $z = x^2 - y^2 \implies z_x = 2x, z_y = -2y, z_{xx} = 2, z_{yy} = -2$  yerine yazalım.

$$z_{xx} + z_{yy} = 2 - 2 = 0 \text{ bulunur.}$$

#### 6.4. Zincir Kuralı

**Teorem 6.4.1:**  $D \subseteq \mathbb{R}^2, f : D \rightarrow \mathbb{R}, z = f(x, y)$  sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca  $f_x, f_y$  kısmi türevleri mevcut ve sürekli olsun.

$\left. \begin{array}{l} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{array} \right\}$  ile tanımlı fonksiyonların  $u$  ve  $v$ 'ye göre kısmi türevleri mevcut ise  $z = f(g(u, v), h(u, v))$ 'nin de  $u$  ve  $v$ 'ye göre kısmi türevleri vardır ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

**Örnek 9:**  $z = \ln(x^2 + y^2)$  için  $\left. \begin{array}{l} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{array} \right\}$  zincir kuralını kullanarak  $z_u$  ve  $z_v$ 'yi bulunuz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} e^u \cos v + \frac{2y}{x^2 + y^2} e^u \sin v \\ &= \frac{2(e^u \cos v)(e^u \cos v)}{e^{2u}(\cos^2 v + \sin^2 v)} + \frac{2(e^u \sin v)(e^u \sin v)}{e^{2u}(\cos^2 v + \sin^2 v)} \\ &= 2 \cos^2 v + 2 \sin^2 v \\ &= 2 \end{aligned}$$