POISSON ÇEKİRDEĞİ

$f \in C[-\pi,\pi]$ $(L^1_{2\pi})$ fonksiyonunun Fourier serisi, $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ ve $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta$ $(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

idi. Riemann-Lebesgue teoreminden $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğundan, Fourier katsayıları düzgün sınırlıdır. Yakınsaklığın garantilenmesi için, seri, r^n $(0 \leq r < 1)$ ile çarpılırsa

$$P(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{1}$$

bulunur. Weierstrass-M testinden, buradaki seri, her bir $r_1 < 1$ için $[-\pi,\pi]$ üzerinde $P(r_1,\theta)$ ya düzgün yakınsaktır. O halde, her θ için

$$\left| P(r_1,\theta) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\right]\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir m doğal sayısı vardır. a_n, b_n Fourier katsayıları (1) formülünde kullanılarak, $P(r,\theta)$ aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} P_r(f)(\theta) \quad : &= P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - t)\right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, P_r(\theta - t)\, dt. \end{aligned}$$

Buradaki $P_r(t) = 1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt$ çekirdeğinin uygun gösterimi bulmak için; $q_r(t) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \sin nt$ alınıp, gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} P_r(t) + iq_r(t) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{it}\right)^n \\ &= \frac{1 - r^2 + 2ir\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin reel kısmı alınarak

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$$

bulunur. Böylece,

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \quad (t \in \mathbb{R},\ 0 \leq r < 1)$$

fonksiyonlarının ailesine Poisson (Abel-Poisson) çekirdeği ve

$$P_r(f)(\theta) := P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{(1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

operatörlerinin ailesine de Poisson (Abel-Poisson) konvolusyon operatörleri denir.

13.1. SONUÇ. P_r *Poisson çekirdeği bir deltasal çekirdektir:*

1. $P_r(t) \geq 0,\ P_r(-t) = P_r(t)$,
2. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = 1$,
3. $\delta > 0$ olmak üzere,

$$\lim_{r\to 1^-} \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} |P_r(t)| = 0 \text{ ve } \lim_{r\to 1^-} |P_r(0)| = \infty$$

sağlanır.

İspat. 1. özellik açıktır. 2. için, (1) formülünden, a_n ve b_n ler f nin Fourier katsayıları olduğundan, $f \equiv 1$ alınırsa $n = 1, 2, \cdots$ için $a_n = b_n = 0$ ve $a_0 = 2$ olur. Böylece, periyodiklikten

$$\begin{aligned} P_r(1)(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)}{1-2r\cos x+r^2}dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. 3. için, $P_r(0) = \frac{1+r}{1-r}$ ve olduğundan; $\lim_{r\to 1^-} |P_r(0)| = \infty$ açıktır. P_r çekirdeğnin 1. deki özellikleri göz önünde tutulursa,

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \frac{(1-r^2)}{1-2r\cos t + r^2} \\ &= \frac{(1-r^2)}{1-2r\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)+r^2} \\ &= \frac{(1-r^2)}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}} \\ &< \frac{(1-r^2)}{4r\sin^2\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

olacağından

$$0 \le \max_{\delta\le|t|\le\pi} |P_r(t)| = \max_{t\ge\delta} P_r(t) \le \max_{t\ge\delta} \frac{(1-r^2)}{4r\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{(1-r^2)\pi^2}{4r\delta^2}$$

eşitsizliğine ulaşılır, buradan da $\lim_{r\to 1^-} \max_{\delta\le|t|\le\pi} |P_r(t)| = 0$ elde edilir.