

BÖLÜM 5

KUVVET SİSTEMLERİ

ve

MOMENT

BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Bir eksen çevresindeki kuvvetin Momenti (cisimdeki bir nokta), uygulanan kuvvetin bu eksen çevresinde cismi çevirme (döndürme) ölçüsüdür.

Momentin şiddeti aşağıdaki eşitlik ile belirlenir:

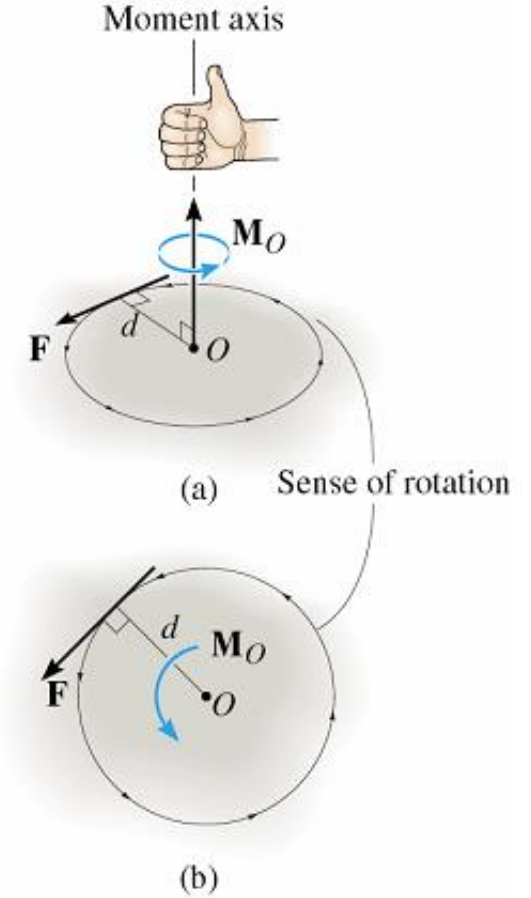
$$M_o = F \times d$$

M_o : Moment

F : Kuvvet

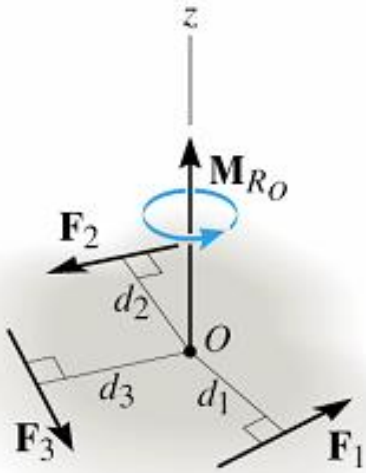
d : Dönme eksenine veya noktasına olan
Dik uzaklık (Kuvvet kolu)

Rotasyonun yönü sağ el kuralı ile belirlenir.



Ref: Beer, et al. (2012)

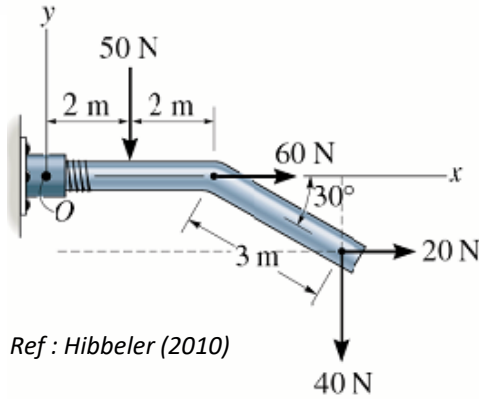
BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT



O noktasına etki eden F_1 , F_2 ve F_3 kuvvet sistemi için moment toplamları (Saat yönü tersi + alınırsa):

$$\Sigma F_x d = M_{R_o}$$

Ref : Hibbeler (2010)



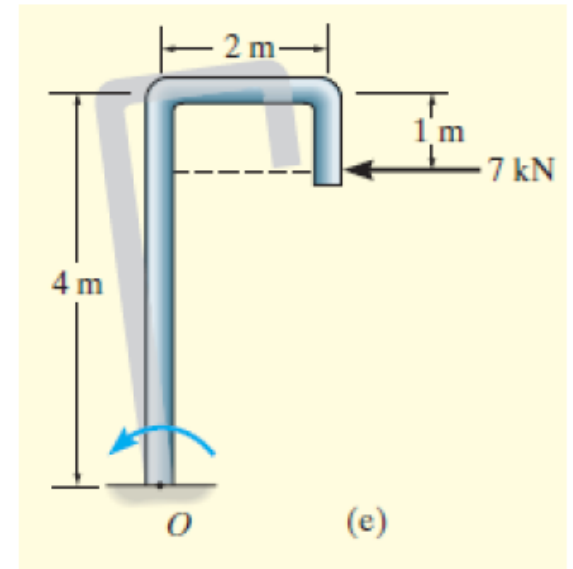
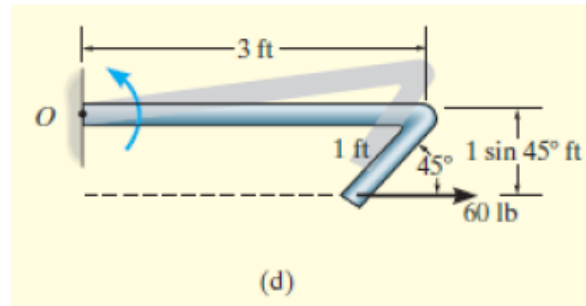
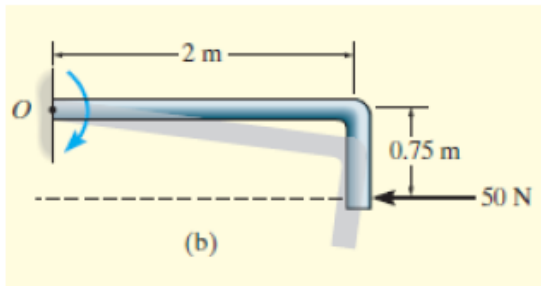
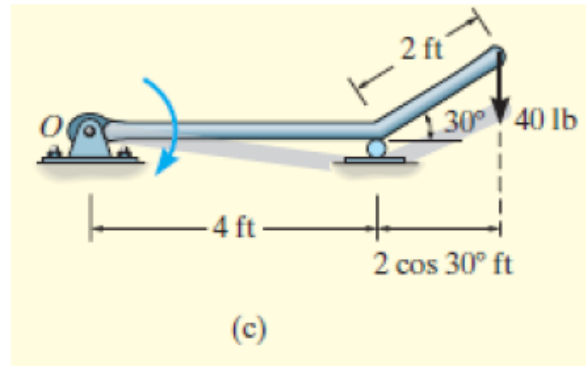
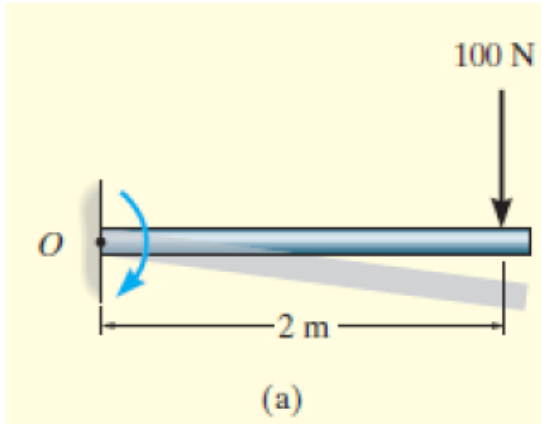
Örnek : O noktasına etki eden F_1 , F_2 ve F_3 kuvvet sistemi için moment toplamını belirleyelim.

Ref : Hibbeler (2010)

$$M_{r_o} = -50N \times (2m) + 60N \times (0) + 20N \times (3 \cdot \sin 30^\circ m) - 40N \times (4m + 3 \cdot \cos 30^\circ m) = -334Nm$$

BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Örnek : Kuvvetler ve O noktasına olan uzaklıklara göre momentleri hesaplayalım.



- a) 200 N.m
- b) 37.5 N.m
- c) 229 lb.ft
- d) 42.4 lb.ft
- e) 21.0 lb.ft

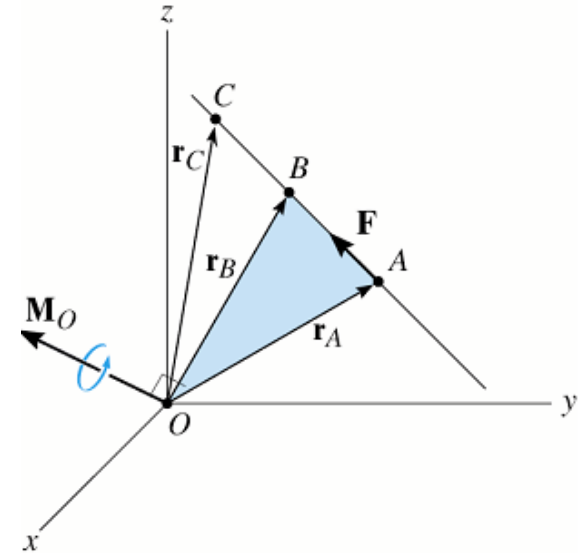
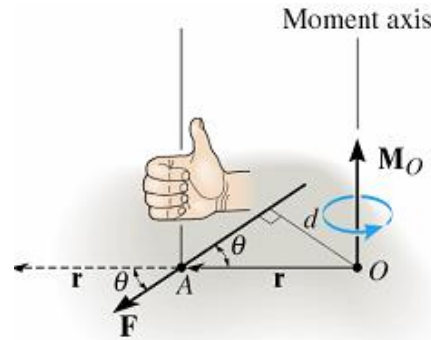
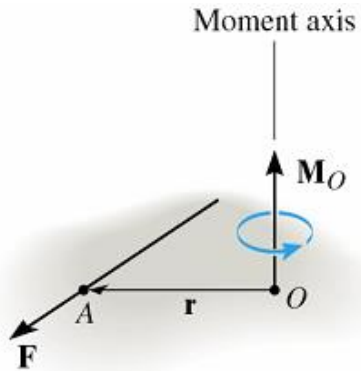
Ref : Hibbeler (2010)

BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

O noktası etrafında F kuvvetinin momenti;

$$M_o = F \times r$$

r : Kuvvetin tesir çizgisi üzerinde herhangi bir noktada kuvvet ile O noktası arasındaki konum vektörü



Ref : Hibbeler (2010)

Note :

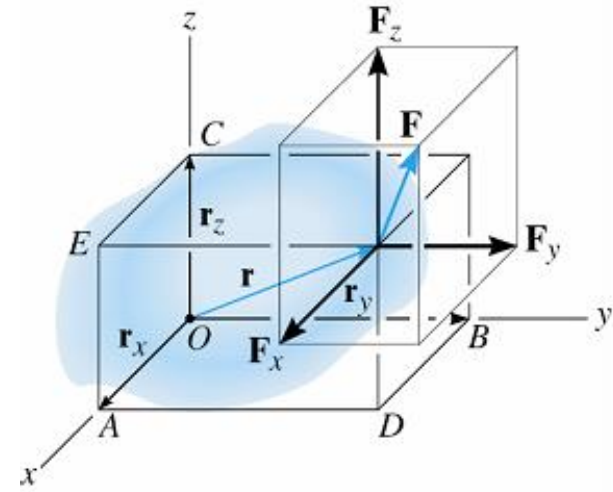
$$r \sin \theta = d \text{ for any } d, \theta$$

BÖLÜM 5. DÜZLEMSEL KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$$

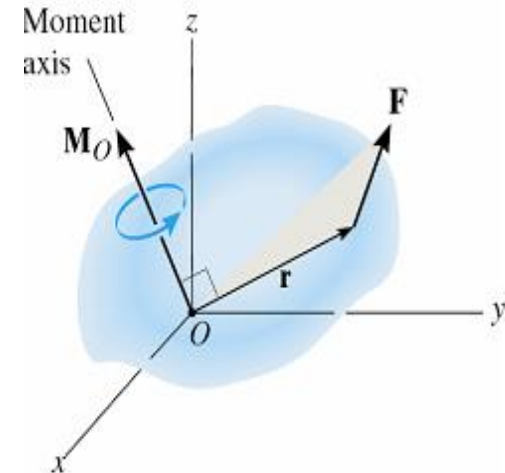
$$\bar{r} = r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k}$$

$$M_o = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



Ref: Hibbeler (2010)

Moment eksenini **F** ve **r** vektörlerini içeren düzleme diktir. Eksen merkezi O noktasından geçmektedir



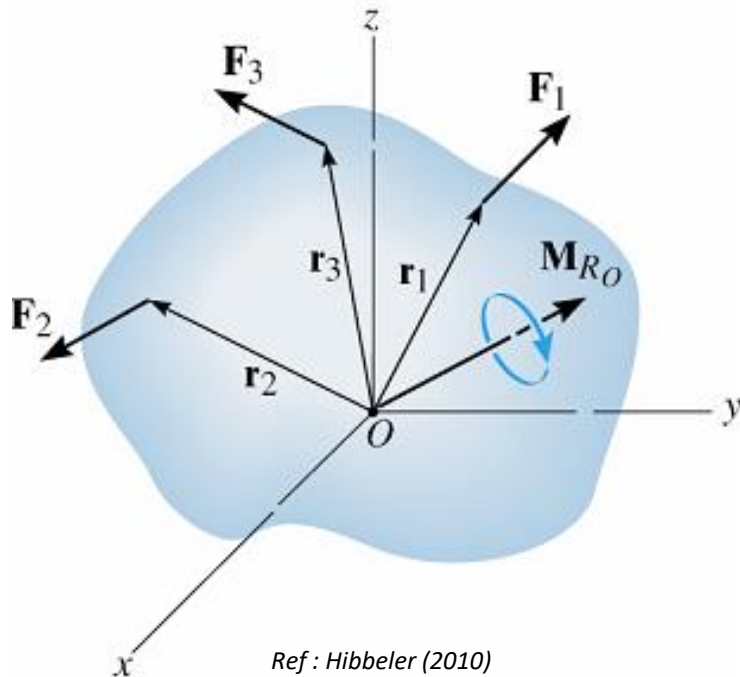
BÖLÜM 5. CİSİM KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Cisme O noktası etrafında etkiyen kuvvet sistemlerinin net momenti “Her bir kuvvet ve uzaklık vektörlerinin momentleri toplamı olacaktır.”

$$\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}$$

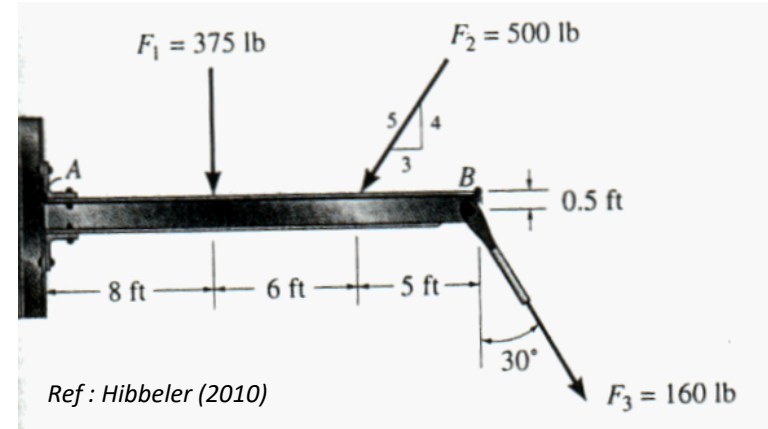
Kartezyen koordinatlarda x, y ve z yönlerinde net moment :

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma m_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$



BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Örnek : Bir kirişe etkiyen kuvvetler aşağıdaki şekilde verilmiştir. B noktası etrafındaki toplam momenti hesaplayınız.



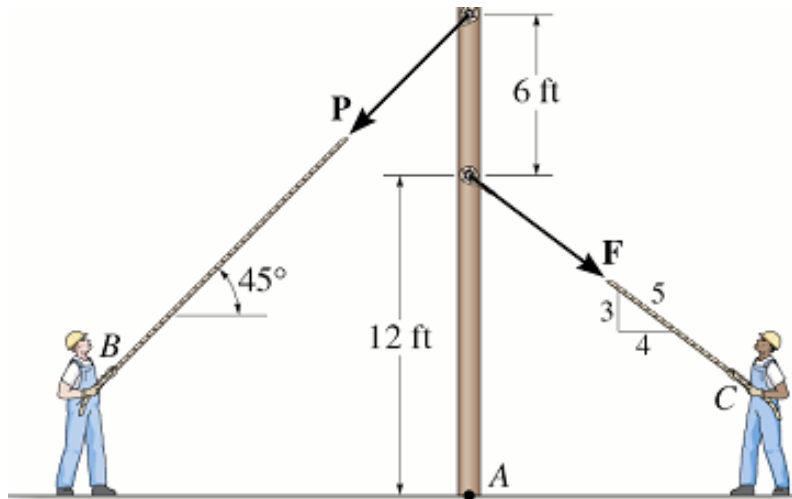
$$\text{CCW} + M_{RB} = \sum M_B ;$$

$$M_{RB} = 375 (11) + \frac{4}{5} (500) (5) + \frac{3}{5} (500) (0) \\ + 160 \cos 30^\circ (0) + 160 \sin 30^\circ (0.5)$$

$$M_{RB} = 6165 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

BÖLÜM 5. KUVVET SİSTEMLERİ ve MOMENT

Örnek : B şahsı direğe bağlı halatı $P = 30$ lb (pound) ile çekmektedir. Direğin A noktası etrafında herhangi bir yöne devrilmemesi için C şahsının uygulaması gereken F kuvvetinin şiddeti kaç lb olmalıdır?



Ref : Hibbeler (2010)

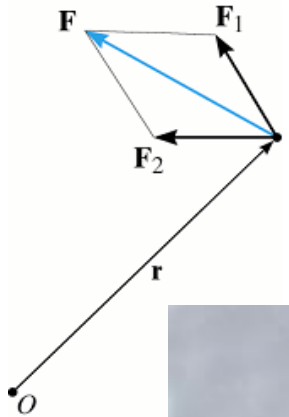
Saat yönü tersi (+) alınırsa,

$$30 \times (\cos 45^\circ) \times 18 = F \left(\frac{4}{5}\right) \times 12 \implies F = 39.8 \text{ lb}$$

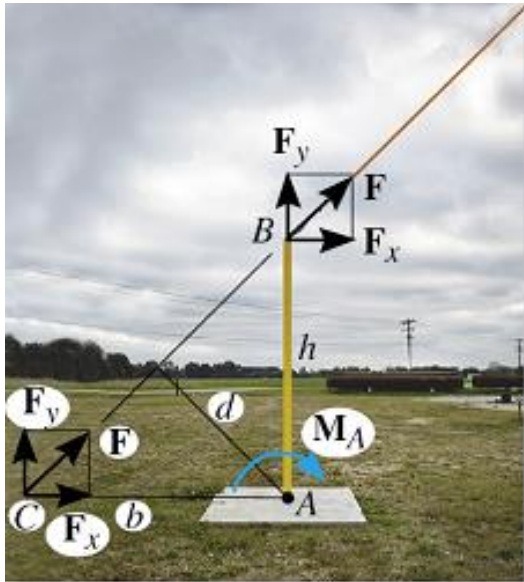
BÖLÜM 5. VARIGNON TEOREMİ

VARIGNON TEOREMİ

Fransız matematikçi Pierre Varignon tarafından 1687 yılında “*Projet d' une nouvelle mécanique*” isimli eserde yayınlanmıştır. Bir Bileşke Kuvvetin Momenti, Aynı Noktada Etkiyen Kuvvet Bileşenlerinin Momentleri Toplamına Eşittir.



$$\bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \bar{r} \times \bar{F}_1 + \bar{r} \times \bar{F}_2$$



Gerilmiş kablo direği hareket etmeyecek şekilde tutuyorsa A noktasındaki moment:

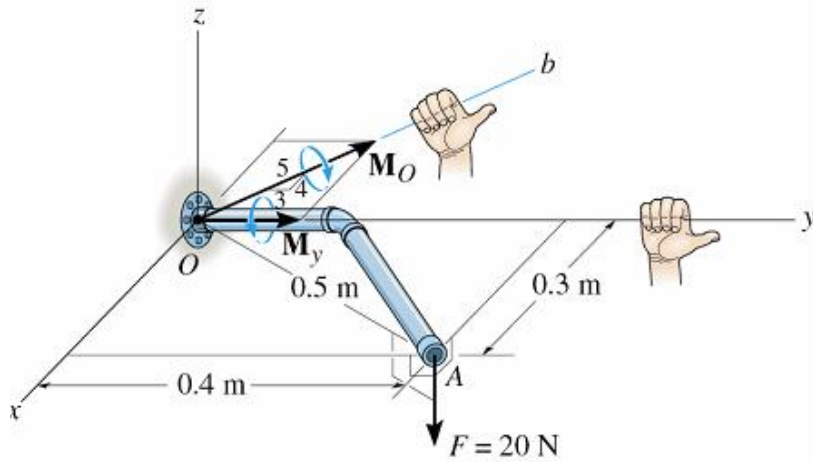
$$M_A = F_x h = F_y b = F d \text{ olmalıdır.}$$

Not : F, iletimlilik yasasına göre konumlandırılmıştır

Ref : Hibbeler (2010)

BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT

Aynı noktada farklı eksenlerdeki momenti belirlemek için skaler veya vektörel analiz yapılabilir

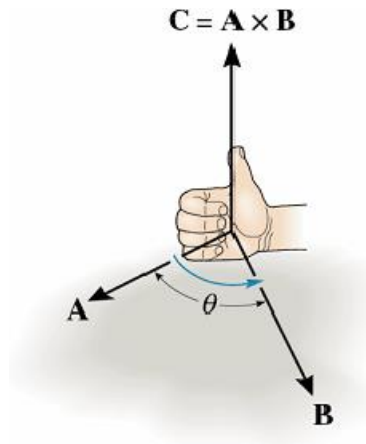


Ref : Hibbeler (2010)

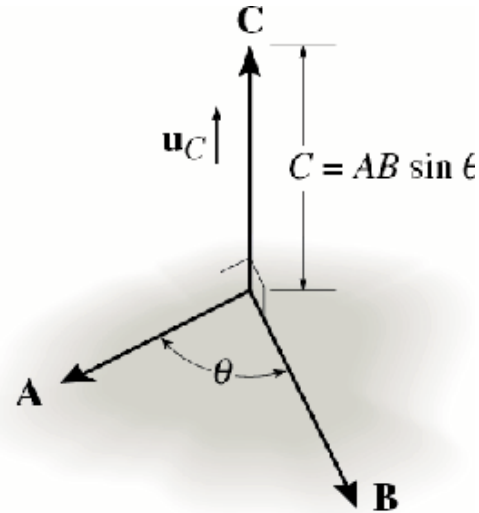
$F=20$ N. Tipik olarak b-ekseni için momenti düşünelim. Aynı şekilde y-eksenindeki momenti hesaplayalım?

$$M_o = F \times r \text{ (eksen } r \text{ ve } F' \text{e dik)}$$

VEKTÖR ÇARPIMINDA SAĞ EL KURALI



$$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}$$



Ref : Hibbeler (2010)

Şiddet

$$C = A B \sin\theta$$

Yön

C , A ve B 'ye DİK

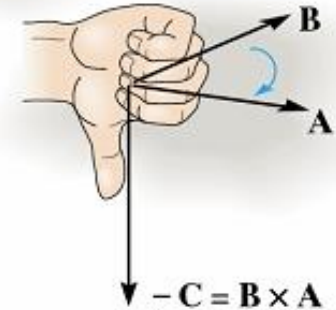
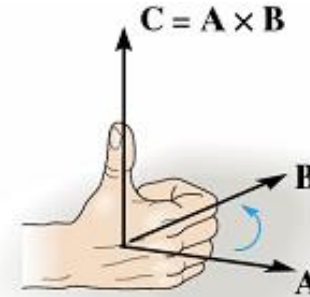
BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT (HATIRLATMA)

Çarpım Komütatif değildir

(Farklı yönlerin çarpımı eşit değildir)

$$\bar{A} \times \bar{B} \neq \bar{B} \times \bar{A}$$

$$\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$$



Skaler Çarpım

$$\alpha(\bar{A} \times \bar{B}) = (\alpha\bar{A}) \times \bar{B} = \bar{A} \times (\alpha\bar{B}) = (\bar{A} \times \bar{B})\alpha$$

Çarpım Distribütiftir (Dağılım)

$$\bar{A} \times (\bar{B} + \bar{D}) = \bar{A} \times \bar{B} + \bar{A} \times \bar{D}$$

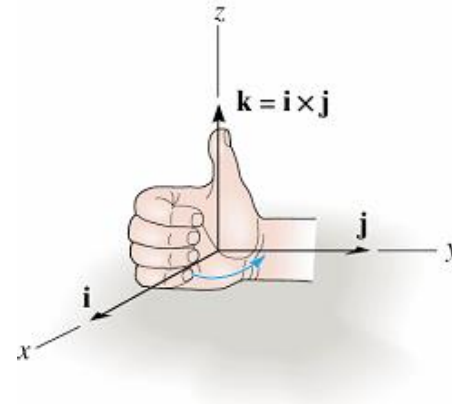
Ref: Hibbeler (2010)

BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT (HATIRLATMA)

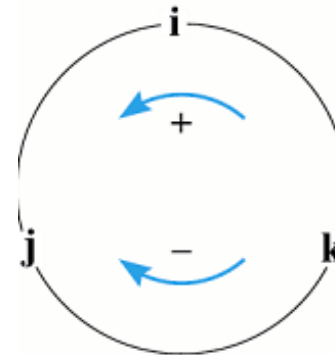
$i \times j$ çarpımında;

Şiddet : $(i)(j)(\sin\theta)$ \iff

Doğrultu (Yön) : $k = i \times j$

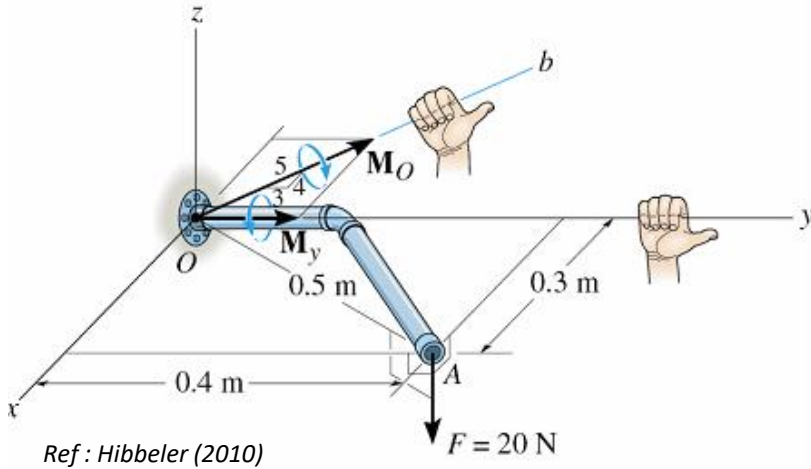


$$\begin{aligned} i \times j &= k & i \times k &= -j & i \times i &= 0 \\ j \times k &= i & j \times i &= -k & j \times j &= 0 \\ k \times i &= j & k \times j &= -i & k \times k &= 0 \end{aligned}$$



Ref : Hibbeler (2010)

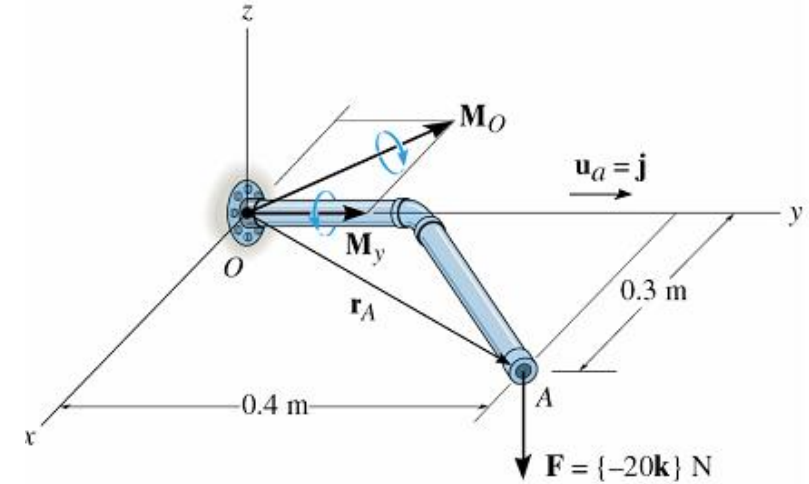
BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT



Ref : Hibbeler (2010)

1. Aşama

$$\begin{aligned} M_O &= r_A \times F = (0.3i + 0.4j) \times (-20k) \\ &= (-8i + 6j) \text{ Nm} \end{aligned}$$



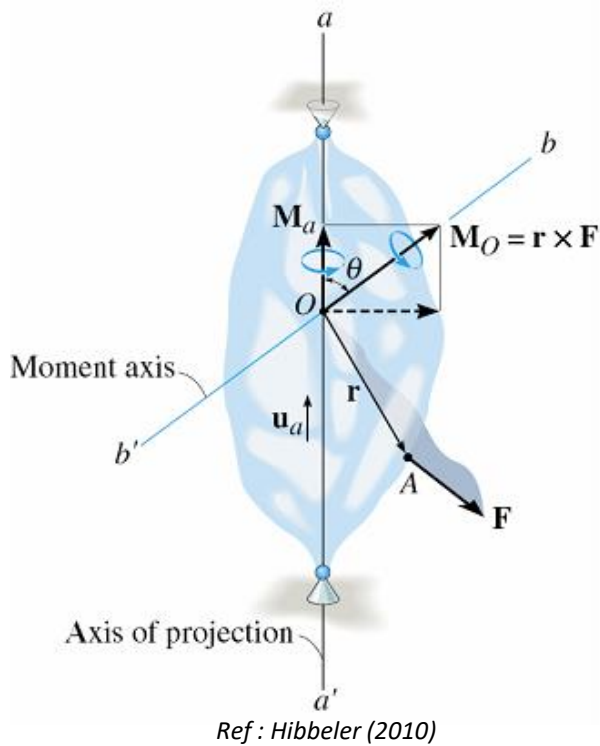
Ref : Hibbeler (2010)

2. Aşama

$$M_y = M_O \cdot u_a = (-8i + 6j) \cdot (j) = 6 \text{ Nm}$$

BÖLÜM 5. FARKLI EKSENLERDE MOMENT

Cisme herhangi bir noktada etkiyen kuvveti ele alırsak; bir önceki örnekteki aşamalar skaler üç eksende bir moment oluşturur. Cisimdeki nokta komütatif (yönlere göre sabit) olduğundan,



If $M_o = \bar{r} \times \bar{F}$ and $M_a = \hat{u}_a \cdot M_o$ then

$$M_a = \hat{u}_a \cdot (\bar{r} \times \bar{F})$$

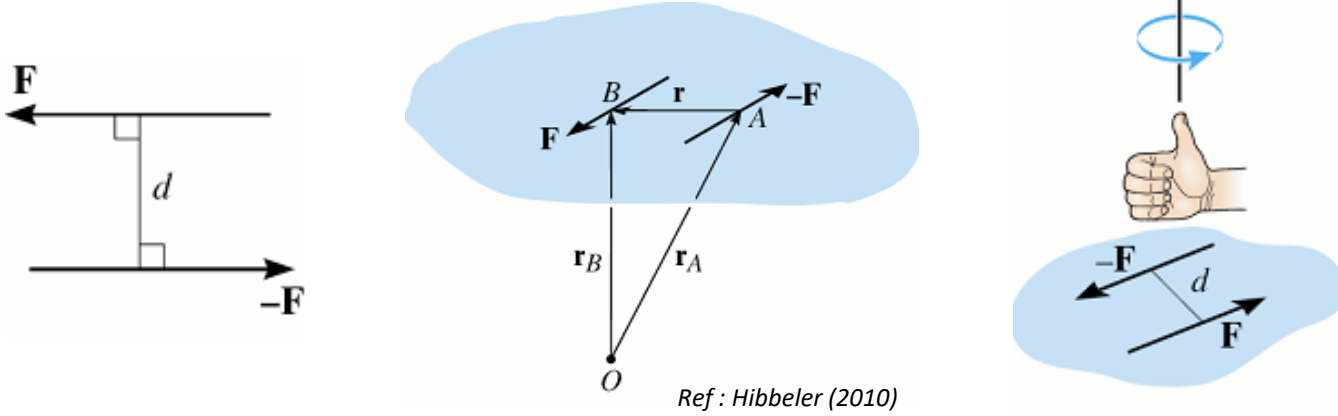
$$= (u_{a_x} i + u_{a_y} j + u_{a_z} k) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

BÖLÜM 5. KUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ

Kuvvet çifti; birbirlerine paralel doğrultuda, aynı şiddete sahip ve zıt yönlerde etkiyen kuvvetlerdir.

Net kuvvet sıfır fakat bir yönde hareket vardır.



Moment çiftleri; aynı noktadaki momentler toplamıdır.

O noktasında moment;

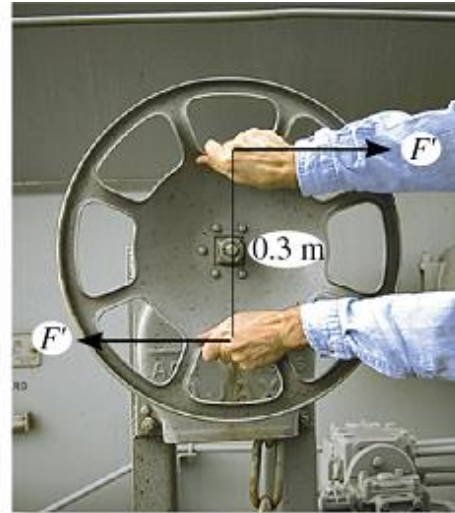
$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

BÖLÜM 5. EŞDEĞERKUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ

Eşdeğer kuvvet çiftleri; aynı momenti yaratan kuvvet çiftleridir. Kuvvetler aynı veya birbirine paralel düzlemlerde etkimelidir. Eşdeğer momentleri oluşturan kuvvetler serbest vektörler olup, cismin herhangi bir noktasında eklenebilirler.

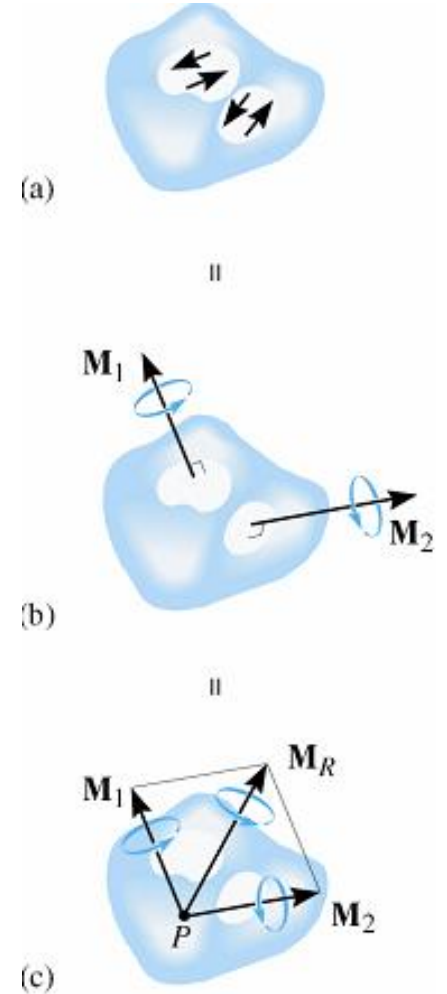


Ref : Hibbeler (2010)



Momentleri M_1 ve M_2 olan eşdeğer kuvvetler için:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



Ref : Meriam and Kraige (1987)

BÖLÜM 5. EŞDEĞERKUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ

Örnek : Aşağıdaki ahşap çerçeveye iki moment çifti etki etmektedir. $d = 6$ ft ise, bileşke momenti hesaplayalım.

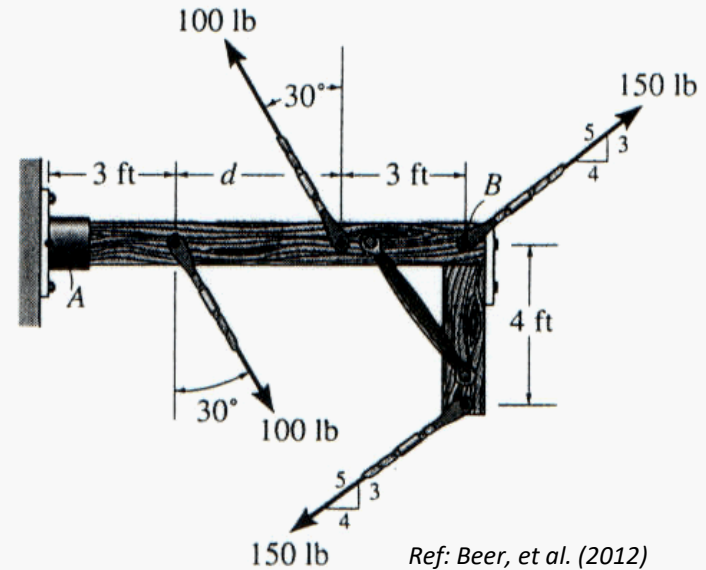
- Tüm kuvvetleri x ve y bileşenlerine ayırıp ayrı ayrı momentleri belirleyelim.
- A noktası etrafında kuvvetlerin bileşkelerine göre momentleri hesaplayarak toplamı belirleyelim

(a)

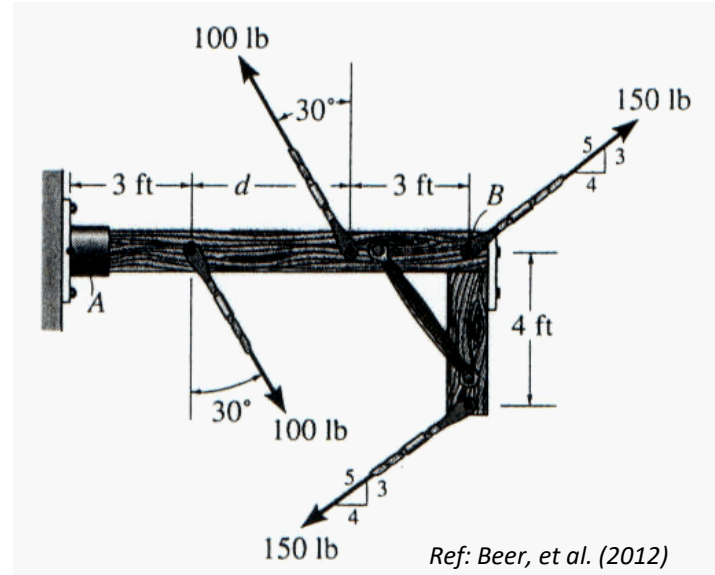
$$M_1 = 100 \cos 30^\circ (6) \\ = 519.6 \text{ lb} \cdot \text{ft CW}$$

$$M_2 = \frac{4}{5} (150)(4) = 480 \text{ lb} \cdot \text{ft CCW}$$

$$M_R = M_1 - M_2 = 519.6 - 480 \\ = \boxed{39.6 \text{ lb} \cdot \text{ft CW}}$$



BÖLÜM 5. EŞDEĞERKUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ



(b)

$$\text{CCW} + M_R = \sum M_B;$$

$$M_R = 100 \cos 30^\circ (3) + \frac{4}{5} (150)(4) - 100 \cos 30^\circ (9)$$

$$M_R = -39.6 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

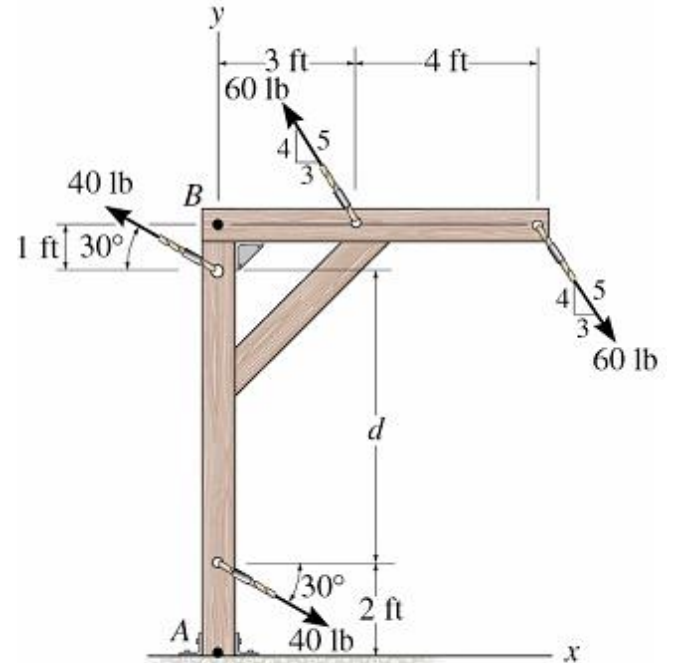
$$= \boxed{39.6 \text{ lb} \cdot \text{ft CW}}$$

BÖLÜM 5. EŞDEĞERKUVVET ÇİFTLERİNİN MOMENTİ

Örnek : Moment çiftlerini dikkate alarak toplam momenti a. direkt, b. A noktasına göre x ve y bileşkeleri ile belirleyelim (d = 4ft)

$$M_c = 40 \cos 30(4) - 60 \left(\frac{4}{5}\right)(4) \\ = -53.4 \text{ lb.ft (CW)}$$

$$M_c = -40 \cos 30(2) + 40 \cos 30(6) \\ + 60 \left(\frac{4}{5}\right)(3) + 60 \left(\frac{3}{5}\right)(7) - 60 \left(\frac{4}{5}\right)(7) - 60 \left(\frac{3}{5}\right)(7) \\ = -53.4 \text{ lb.ft (CW)}$$



Ref: Beer, et al. (2012)

Bölüm 5. Kısa Notlar

- ❑ *Moment; kuvvetin bir eksen etrafında veya cismin uygulanan noktasında oluşturduğu çevirme hareketinin ölçüsüdür.*
- ❑ *Moment şiddeti, kuvvetin şiddeti ile ilgili noktaya olan dik uzaklığının çarpımı kadardır.*
- ❑ *Varignon Teoremi; bileşke kuvvetin momenti, aynı noktada etkiyen kuvvet bileşenlerinin momentleri toplamı olarak tanımlanmıştır.*
- ❑ *Kuvvet vektörlerinin çarpımında sağ el kuralı*
- ❑ *Kuvvet ve moment çiftleri. Cismin hareketsiz kalması için toplam momentin noktasal ve düzlemsel koordinatlarda sıfır olması.*
- ❑ *Eşdeğer kuvvet çiftleri ve momentleri*