Bölüm 2

Tamlık Bölgeleri ve Cisimler

Halkalar birimli ve değişmeli olmak zorunda değildir. Bu bölümde "tamlık bölgesi" ve "cisim" adı verilen bazı özelliklere sahip birimli ve değişmeli halkalar ele alınacaktır ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca tamlık bölgesi ve cisim kavramları arasındaki ilişkiler üzerinde durulacaktır.

2.1 Tamlık Bölgeleri

Tanım 2.1.1 *R bir halka olsun.*

- *Eğer $ab = 0_R$ şartını sağlayan her $a,\ b \in R$ için $a = 0_R$ veya $b = 0_R$ oluyorsa R ye* **sıfır bölensiz halka** *denir.*
- *Eğer $0_R \neq a \in R$ için $ab = 0_R$ olacak şekilde $0_R \neq b \in R$ mevcutsa a ya R de bir* **sol sıfır bölen**, *b ye de bir* **sağ sıfır bölen** *denir. Hem sol hem de sağ sıfır bölen elemana bir* **sıfır bölen** *denir.*

Örnek 2.1.2 Bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ halkaları sıfır bölensizdir. ▲

Örnek 2.1.3 $\mathbb{Z}$ üzerinde

$$x \oplus y = x + y - 1,\ x \odot y = x + y - xy$$

işlemleri tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ bir halkadır. Bu halkanın sıfır bölensiz olup olmadığını araştıralım. $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ halkasının $\oplus$ ya göre birimi 1 dir. Şimdi $x,\ y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x \odot y = 1$ olsun. Bu durumda $(x-1)(1-y) = 0$ olup $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkası sıfır bölensiz olduğundan $x - 1 = 0$ veya $1 - y = 0$ dır. Böylece $x = 1$ veya $y = 1$ bulunur. Bu sebeple $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ halkası sıfır bölensizdir. ▲

Örnek 2.1.4 $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$ halkasının sıfır bölenleri $\overline{2},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6},\ \overline{8},\ \overline{10},\ \overline{12},\ \overline{14},\ \overline{15},\ \overline{16},\ \overline{18}$ dir. ▲

Tanım 2.1.5 *D birimli, değişmeli bir halka ve $1_D \neq 0_D$ olsun. Eğer D sıfır bölensiz ise D ye bir* **tamlık bölgesi** *denir.*

Örnek 2.1.6

(1) Bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ halkaları birer tamlık bölgesidir.

(2) $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ olmak üzere bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle $n\mathbb{Z} = \{nk |\ k \in \mathbb{Z}\}$ halkası birimli olmadığından bir tamlık bölgesi değildir.

(3) Bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle $M_2(\mathbb{R})$ halkası değişmeli olmadığından bir tamlık bölgesi değildir.

(4) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi |\ a,\ b \in \mathbb{Z}\}$ Gauss tamsayılar halkası bir tamlık bölgesidir.

(5) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{(a, b) |\ a,\ b \in \mathbb{Z}\}$ direkt çarpım halkası sıfır bölen elemanlara sahip olduğundan bir tamlık bölgesi değildir. ▲

Teorem 2.1.7 *$1 < n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_n$ halkasının tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter şart n nin asal sayı olmasıdır.*

Teorem 2.1.8 (Sadeleşme Özelliği) *D bir tamlık bölgesi, $a,\ b,\ c \in D$ ve $a \neq 0_R$ olsun. Eğer $ab = ac$ veya $ba = ca$ ise $b = c$ dir.*

2.2 Cisimler

Tanım 2.2.1 *F birimli, değişmeli bir halka ve $1_F \neq 0_F$ olsun. Eğer F değişmeli ise F ye bir* **cisim** *adı verilir.*

Örnek 2.2.2 Bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ halkaları birer cisimdir. ▲

Teorem 2.2.3 *Her cisim bir tamlık bölgesidir.*

Uyarı 2.2.4 Bazı tamlık bölgeleri cisim değildir. Örneğin bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle $\mathbb{Z}$ halkası bir tamlık bölgesi olmasına rağmen, $\mathbb{Z}$ de çarpmaya göre tersinir elemanlar sadece ± 1 olduğundan $\mathbb{Z}$ bir cisim değildir. ♦

Teorem 2.2.5 *Her sonlu tamlık bölgesi bir cisimdir.*

Sonuç 2.2.6 *$1 < n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_n$ nin cisim olması için gerek ve yeter şart n nin bir asal sayı olmasıdır.*

Örnek 2.2.7 $\mathbb{Z}_{317}$ cisminde $x = x^{-1}$ şartını sağlayan x elemanlarını belirleyelim. Eğer $x = x^{-1}$ ise $x^2 = \overline{1}$ dir. $\mathbb{Z}_{317}$ bir cisim olduğundan sıfır bölensizdir. Yani $x^2 - \overline{1} = (x - \overline{1})(x + \overline{1}) = \overline{0}$ olması $x - \overline{1} = \overline{0}$ veya $x + \overline{1} = \overline{0}$ olmasını gerektirir. Böylece $x = \overline{1}$ veya $x = \overline{316}$ olur. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_{317}$ cisminde çarpımsal tersi kendisine eşit olan elemanlar $\overline{1}$ ve $\overline{316}$ dir. ▲

Altcisimler

Tanım 2.2.8 *F bir cisim ve F nin bir althalkası E olsun. Eğer E de F nin işlemlerine göre bir cisim oluyorsa E ye F nin bir* **altcismi** *adı verilir.*

Teorem 2.2.9 *F bir cisim ve $\emptyset \neq E \subseteq F$ olsun. E nin F nin bir altcismi olması için gerek ve yeter şart*

(i) $|E| \geq 2$,

(ii) *her $a,\ b \in E$ için $a - b,\ ab \in E$*

(iii) *her $0 \neq c \in E$ için $c^{-1} \in E$*

olmasıdır.

Örnek 2.2.10 $\mathbb{Q}$ cismi $\mathbb{R}$ nin, $\mathbb{R}$ cismi $\mathbb{C}$ nin birer altcismidir. ▲