Bölüm 3

İdealler ve Bölüm Halkaları

Bu bölümde "ideal" kavramı tanımlanıp bazı özellikleri incelenecektir. İdeallere çeşitli örnekler verilecektir. Althalka ve ideal kavramları arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Ayrıca idealler aracılığıyla ortaya çıkan "bölüm halkası" kavramı ele alınacaktır.

3.1 İdealler

Tanım 3.1.1 *R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olmak üzere eğer*

(1) *her $x,\ y \in I$ için $x - y \in I$,*

(2) *her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $xr,\ rx \in I$*

sağlanıyorsa I ya R nin bir **ideali** *denir. Özel olarak her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ oluyorsa I ya R nin bir* **sol ideali***, $xr \in I$ oluyorsa I ya R nin bir* **sağ ideali** *adı verilir.*

Örnek 3.1.2 Bir R halkasının $\{0_R\}$ ve R altkümeleri birer idealidir. ▲

Teorem 3.1.3 *R birimli bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Eğer $1_R \in I$ ise $I = R$ dir.*

Teorem 3.1.4 *Bir halkanın her ideali althalkadır.*

Uyarı 3.1.5 Bazı althalkalar ideal olmayabilir. Örneğin $2\mathbb{Z}$ halkası $\mathbb{Q}$ nun bir althalkası olmasına rağmen $x = 2 \in 2\mathbb{Z}$ ve $r = 1/3 \in \mathbb{Q}$ için, $xr = 2/3 \notin 2\mathbb{Z}$ olduğundan $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nun bir ideali değildir. ♦

Örnek 3.1.6 $\mathbb{Z}$ halkasının her althalkası bir idealdir. ▲

Örnek 3.1.7 $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : \ a, \ b, \ c \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile bir halkadır. R nin $\emptyset \neq I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \ b \in \mathbb{Z} \right\}$ altkümesini göz önüne alalım.

(1) Her $\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ için,

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

olur.

(2) Her $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in R$ ve $\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ için,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ab_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

ve

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

olur.

Dolayısıyla I kümesi R nin bir idealidir. ▲

Örnek 3.1.8 $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Q} \right\}$ kümesi matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. R nin boş kümeden farklı $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : \ a, \ b \in \mathbb{Z} \right\}$ altkümesi bir althalkadır fakat $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in I$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

olduğundan bir ideal değildir. ▲

Örnek 3.1.9 R birimli ve değişmeli bir halka ve $a \in R$ olmak üzere $\langle a \rangle = \{ar : \ r \in R\}$ kümesi R nin bir idealidir. ▲

Tek Üreteçli İdealler ve Tek Üreteçli İdealler Bölgesi

Tanım 3.1.10 *R birimli, değişmeli bir halka ve $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in R$ olsun. R nin*

$$\langle a_1, a_2,\ \ldots,\ a_n\rangle = \{a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n |\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n \in R\}$$

idealine $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ **tarafından üretilen ideali** *denir. Özel olarak $a \in R$ için*

$$\langle a\rangle = \{ar |\ r \in R\}$$

idealine R nin a **tarafından üretilen tek üreteçli ideali** *denir.*

Tanım 3.1.11 *R bir tamlık bölgesi olsun. Eğer R nin her ideali tek üreteçli ideal ise R ye bir* **tek üreteçli idealler bölgesi** *denir.*

Uyarı 3.1.12 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda

$$\langle a\rangle = \{ar + sa + na + \sum_{i=1}^{m} r_i a s_i :\ r,\ r_i,\ s,\ s_i \in R,\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}^+\}$$

şeklindedir. ♦

Teorem 3.1.13 *$\mathbb{Z}$ halkasının bütün idealleri tek üreteçlidir. Böylece $\mathbb{Z}$ halkası bir tek üreteçli idealler bölgesidir.*

İdeallerin Toplamı ve Çarpımı

Tanım 3.1.14 *R bir halka ve R nin sol (sağ) idealleri I_1 ile I_2 olsun. Bu durumda*

- *$I_1 + I_2 = \{a + b :\ a \in I_1,\ b \in I_2\}$ sol (sağ) idealine I_1 ve I_2 ideallerinin* **toplamı**,
- *$I_1 \cdot I_2 = \{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n :\ a_i \in I_1,\ b_i \in I_2\ (1 \leq i \leq n), n \in \mathbb{Z}\}$ sol (sağ) idealine I_1 ve I_2 ideallerinin* **çarpımı** *denir.*

Örnek 3.1.15 $\mathbb{Z}$ halkasının $I_1 = 3\mathbb{Z}$ ve $I_2 = 5\mathbb{Z}$ idealleri veriliyor.

(1) $I_1 + I_2 = \{a + b :\ a \in I_1,\ b \in I_2\} = \{3x + 5y :\ x, y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$,

(2)
$$\begin{aligned} I_1 \cdot I_2 &= \{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n :\ a_i \in I_1,\ b_i \in I_2\ (1 \leq i \leq n), n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(3x_1)(5y_1) + (3x_2)(5y_2) + \ldots + (3x_n)(5y_n) :\ x_i,\ y_i \in \mathbb{Z}\ (1 \leq i \leq n)\} \\ &= \{15x :\ x \in \mathbb{Z}\} \\ &= 15\mathbb{Z} \end{aligned}$$

olarak bulunur. ▲

3.2 Bölüm Halkaları

R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. $a,\ b \in R$ için

$$\text{“ } a \equiv b \text{ olması için gerek ve yeter şart } a - b \in I \text{ olmasıdır ”}$$

şeklinde tanımlanan “$\equiv$” bağıntısı R üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı sonucunda ortaya çıkan bütün denklik sınıflarının kümesini $R/I = \{a + I : \ a \in R\}$ ile gösterelim.

Teorem 3.2.1 *R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Her $a + I,\ b + I \in R/I$ için*

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

ve

$$(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$$

ile tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle $(R/I, +, \cdot)$ bir halkadır. Bu halkaya R nin I ya göre **bölüm halkası** *adı verilir. Eğer R birimli bir halka ise R/I halkası da birimlidir ve birimi $1_R + I$ dır. Eğer R değişmeli ise R/I da değişmelidir.*

Örnek 3.2.2 $\mathbb{Z}$ halkasının $3\mathbb{Z}$ idealini göz önüne alalım.

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{a + 3\mathbb{Z} : \ a \in \mathbb{Z}\} = \{0 + 3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$$

bölüm halkasının toplam ve çarpım tablolarını yapalım.

$+$	$0 + 3\mathbb{Z}$	$1 + 3\mathbb{Z}$	$2 + 3\mathbb{Z}$
$0 + 3\mathbb{Z}$	$0 + 3\mathbb{Z}$	$1 + 3\mathbb{Z}$	$2 + 3\mathbb{Z}$
$1 + 3\mathbb{Z}$	$1 + 3\mathbb{Z}$	$2 + 3\mathbb{Z}$	$0 + 3\mathbb{Z}$
$2 + 3\mathbb{Z}$	$2 + 3\mathbb{Z}$	$0 + 3\mathbb{Z}$	$1 + 3\mathbb{Z}$

$\cdot$	$0 + 3\mathbb{Z}$	$1 + 3\mathbb{Z}$	$2 + 3\mathbb{Z}$
$0 + 3\mathbb{Z}$	$0 + 3\mathbb{Z}$	$0 + 3\mathbb{Z}$	$0 + 3\mathbb{Z}$
$1 + 3\mathbb{Z}$	$0 + 3\mathbb{Z}$	$1 + 2\mathbb{Z}$	$2 + 3\mathbb{Z}$
$2 + 3\mathbb{Z}$	$0 + 3\mathbb{Z}$	$2 + 3\mathbb{Z}$	$1 + 3\mathbb{Z}$

Tablo 3.1: $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ Bölüm Halkasının İşlem Tabloları ▲

Örnek 3.2.3 $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : \ a,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{Q} \right\}$ halkası ve R nin

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \ a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

idealini göz önüne alalım. R/I bölüm halkasını belirleyelim. $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + I = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + I$$

olup $R/I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + I \ : \ c \in \mathbb{Q} \right\}$ olarak bulunur. ▲