

Bölüm 5

Bir Tamlık Bölgesinin Kesirler Cismi

\mathbb{Z} tamlık bölgesi ve \mathbb{Q} cismi arasındaki ilişkiden yola çıkılarak bu bölümde bir tamlık bölgesinin kesirler cismi kavramını ele alacağız. Verilen bir tamlık bölgesinin kesirler cisminin nasıl yapılandırılacağını ve tamlık bölgesi ile kesirler cismi arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

5.1 Kesirler Cismi

D bir tamlık bölgesi, $D^* := D \setminus \{0\}$ ve $S = D \times D^*$ olsun.

Tanım 5.1.1 S kümesi üzerinde “ \sim ” bağıntısını

“ $(a, b) \sim (c, d)$ olması için gerek ve yeter şart $ad = bc$ olmasıdır”

şeklinde tanımlayalım.

Önerme 5.1.2 “ \sim ” bağıntısı S kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 5.1.3 $(a, b) \in S$ nin “ \sim ” bağıntısına göre denklik sınıfı a/b olmak üzere

$$Q = \{a/b : (a, b) \in S\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Uyarı 5.1.4 $0 \neq x \in D$ ve $a/b \in Q$ için $a/b = ax/bx$ dir. ♦

Önerme 5.1.5 Q kümesi üzerinde $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$ ve $a/b \cdot c/d = ac/bd$ ile tanımlı toplama ve çarpma birer işlemdir.

Teorem 5.1.6 $Q = \{a/b : (a, b) \in S\}$ kümesi $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$ ve $a/b \cdot c/d = ac/bd$ ile tanımlı “+” ve “.” işlemleriyle bir cisimdir. Q ya D nin **kesirler cismi** denir.

Teorem 5.1.7 D bir tamlık bölgesi ve Q da D nin kesirler cismi olmak üzere zaman $D' = \{x/1_D : x \in D\}$ kümesi Q nun bir altkalkasıdır ve $D \cong D'$ dir.

Örnek 5.1.8 \mathbb{Z}_3 tamlık bölgesinin kesirler cismini belirleyelim.

$$S = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3^* = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})\}$$

ve

$$\bar{0}/\bar{1} = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})\} = \bar{0}/\bar{2}$$

$$\bar{1}/\bar{1} = \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})\} = \bar{2}/\bar{2}$$

$$\bar{1}/\bar{2} = \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1})\} = \bar{2}/\bar{1}$$

olduğundan $Q = \{\bar{0}/\bar{1}, \bar{1}/\bar{1}, \bar{1}/\bar{2}\}$ dir. Q kesirler cisminin toplama ve çarpım tabloları

+	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{2}$	·	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{2}$
$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{2}$	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{0}/\bar{1}$
$\bar{1}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{2}$	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{1}$	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{2}$
$\bar{1}/\bar{2}$	$\bar{1}/\bar{2}$	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{2}$	$\bar{0}/\bar{1}$	$\bar{1}/\bar{2}$	$\bar{1}/\bar{1}$

şeklindedir. Ayrıca $\theta : \mathbb{Z}_3 \rightarrow Q$, $\theta(\bar{a}) = \bar{a}/\bar{1}$ fonksiyonu bir izomorfizmadır. ▲

Uyarı 5.1.9 Eğer D bir cisim ise D nin kesirler cismi Q olmak üzere $D \cong Q$ olur. ◆

Örnek 5.1.10 \mathbb{Z} nin kesirler cismi \mathbb{Q} cismine izomorftur. ▲