Bölüm 10

Polinomlarda Bölünebilme

Bu bölümde polinomlar halkasında bölünebilme, bölüm algoritması ve en büyük ortak bölen kavramları tanımlanacaktır. Ayrıca bu bölümde F bir cisim olarak kabul edilecektir.

10.1 Polinomlarda Bölünebilme

Tanım 10.1.1 *$f(x),\ g(x) \in F[x]$ olmak üzere eğer $g(x) = f(x)h(x)$ olacak biçimde $h(x) \in F[x]$ varsa* ***$f(x)$, $g(x)$ i böler*** *veya* ***$g(x)$, $f(x)$ ile bölünür*** *denir ve $f(x) \mid g(x)$ ile gösterilir. Bu durumda $g(x)$ polinomuna $f(x)$ in bir* ***katı****, $f(x)$ polinomuna da $g(x)$ in bir* ***böleni*** *adı verilir.*

Önerme 10.1.2 *F cisminin sıfırdan farklı elemanlarının iki önemli özelliği vardır:*

(1) *$0 \neq a \in F$ her $f(x) \in F[x]$ polinomunun bir bölenidir.*

(2) *Eğer $f(x) \mid g(x)$ ise $0 \neq a \in F$ için $af(x) \mid g(x)$ dir.*

Teorem 10.1.3 (Polinomlar İçin Bölüm Algoritması) *$f(x),\ g(x) \in F[x]$ ve $f(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $g(x) = f(x)q(x)+r(x)$, $r(x) = 0$ veya $\operatorname{der} r(x) < \operatorname{der} f(x)$ olacak biçimde tek türlü $q(x),\ r(x) \in F[x]$ vardır.*

Örnek 10.1.4 $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomlar halkasında $\overline{3}x^4 + x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{1}$ ve $x^2 + \overline{4}x + \overline{2}$ polinomları için bölüm algoritmasını uygularsak

$$\overline{3}x^4 + x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{1} = (x^2 + \overline{4}x + \overline{2})(\overline{3}x^2 + \overline{4}x) + \overline{2}x + \overline{1}$$

elde edilir. ▲

10.2 Polinomlar Halkasında En Büyük Ortak Bölen

Tanım 10.2.1 *Başkatsayısı 1 olan bir polinoma* **monik polinom** *adı verilir.*

Tanım 10.2.2 **(En Büyük Ortak Bölen)** $0 \neq f(x), 0 \neq g(x) \in F[x]$ *olsun. Bir* $d(x) \in F[x]$ *için*

(1) $d(x)$ *monik,*

(2) $d(x) \mid f(x)$ *ve* $d(x) \mid g(x)$,

(3) $h(x) \mid f(x)$ *ve* $h(x) \mid g(x)$ *iken* $h(x) \mid d(x)$

sağlanıyorsa $d(x)$ *polinomuna* $f(x)$ *ile* $g(x)$ *polinomlarının* **en büyük ortak böleni** *denir ve* $d(x) = ebob(f(x), g(x))$ *ile gösterilir.*

Teorem 10.2.3 $0 \neq f(x), 0 \neq g(x) \in F[x]$ *olsun. Bu durumda* $f(x)$ *ile* $g(x)$ *in en büyük ortak böleni* $d(x)$ *vardır ve tektir. Ayrıca*

$$d(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$$

olacak şekilde $s(x),\ t(x) \in F[x]$ *polinomları vardır.*

Örnek 10.2.4 $\mathbb{Z}_7[x]$ halkasında $f(x) = \overline{3}x^3 + \overline{5}x^2 + \overline{6}x$ ve $g(x) = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{4}x + \overline{5}$ polinomlarının en büyük ortak bölenini bulalım. Bölüm Algoritmasının ardışık olarak uygulanmasıyla

$$\begin{array}{ll} g(x) & = f(x)(\overline{6}x) + \overline{5}x^2 + \overline{4}x + \overline{5} \\ f(x) & = (\overline{5}x^2 + \overline{4}x + \overline{5})(\overline{2}x + \overline{5}) + \overline{4}x + \overline{3} \\ \overline{5}x^2 + \overline{4}x + \overline{5} & = (\overline{4}x + \overline{3})(\overline{3}x + \overline{4}) \end{array}$$

elde edilir. En büyük ortak bölenin monik olması gereğince

$$\begin{array}{rcl} d(x) & = & \overline{4}^{-1}(\overline{4}x + \overline{3}) \\ & = & \overline{2}(\overline{4}x + \overline{3}) \\ & = & x + \overline{6} \end{array}$$

en büyük ortak bölendir. Diğer taraftan

$$\begin{array}{lcl} \overline{4}x + \overline{3} & = & f(x) - (\overline{5}x^2 + \overline{4}x + \overline{5})(\overline{2}x + \overline{5}) \\ & = & f(x) - [g(x) - f(x)(\overline{6}x)](\overline{2}x + \overline{5}) \\ & = & f(x) - g(x)(\overline{2}x + \overline{5}) + f(x)(\overline{5}x^2 + \overline{2}x) \\ & = & f(x)(\overline{5}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}) + g(x)(\overline{5}x + \overline{2}) \\ \overline{2}(\overline{4}x + \overline{3}) & = & f(x)[\overline{2}(\overline{5}x^2 + \overline{2}x + \overline{1})] + g(x)[\overline{2}(\overline{5}x + \overline{2})] \\ x + \overline{6} & = & f(x)(\overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{2}) + g(x)(\overline{3}x + \overline{4}) \end{array}$$

olduğundan $s(x) = \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{2}$ ve $t(x) = \overline{3}x + \overline{4}$ şeklindedir. ▲

Tanım 10.2.5 *$0 \neq f(x), 0 \neq g(x) \in F[x]$ olsun. Eğer ebob$(f(x), g(x)) = 1$ ise $f(x)$ ile $g(x)$ polinomları* **aralarında asaldır** *denir.*

Örnek 10.2.6 $\mathbb{Z}_7[x]$ halkasında $f(x) = \overline{3}x^2 + \overline{2}$ ve $g(x) = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{4}x + \overline{5}$ polinomlarını göz önüne alalım. ebob$(f(x), g(x)) = \overline{1}$ olduğundan $f(x)$ ve $g(x)$ polinomları aralarında asaldır. ▲

Teorem 10.2.7 *F cismi üzerinde $f(x)$ ve $g(x)$ aralarında asal polinomlar olsun. Eğer $f(x) \mid g(x)h(x)$ ise $f(x) \mid h(x)$ dir.*