



MAT302 CEBİR II FİNAL SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

1. (a) \mathbb{Q} rasyonel sayılar halkasının bütün ideallerini belirleyiniz.

ÇÖZÜM : \mathbb{Q} rasyonel sayılar halkası bir cisimdir. Bir cismin yegane idealleri $\{0\}$ ve kendisi olduğundan \mathbb{Q} rasyonel sayılar halkasının bütün idealleri $\{0\}$ ve \mathbb{Q} dur.

- (b) $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ kümesinin matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka olduğu biliniyor. R halkasının karakteristiğini belirleyiniz.

ÇÖZÜM : R halkasının çarpma işlemine göre birim elemanının $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ olduğu

kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan $3 \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ olduğundan R halkasının karakteristiği 3 tür.

2. (a) $f(x) = x^8 + 15x^6 + 10x + 5$ polinomu $\mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkasında indirgenmez midir? Araştırınız.

ÇÖZÜM : $p = 5$ asalı için $5 \mid 5$, $5 \mid 10$, $5 \mid 15$, fakat $5 \nmid 1$ ve $5^2 \nmid 5$ şartları sağlandığından verilen $f(x)$ polinomu **Eisenstein İndirgenmezlik Kriteri** gereğince $\mathbb{Q}[x]$ polinomlar halkasında indirgenmezdir. Böylece $\mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkasında da indirgenmezdir.

- (b) \mathbb{Q}/\mathbb{Z} bölüm halkası sıfır bölensiz midir? Araştırınız.

ÇÖZÜM : $\frac{3}{2} + \mathbb{Z}$, $\frac{2}{3} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ için $(\frac{3}{2} + \mathbb{Z})(\frac{2}{3} + \mathbb{Z}) = \frac{6}{6} + \mathbb{Z} = 1 + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$ olması sebebiyle \mathbb{Q}/\mathbb{Z} bölüm halkası sıfır bölensizdir.

3. $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $g(x) = x^3 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomları veriliyor.

- (a) $d(x) = \text{ebob}(f(x), g(x))$ polinomunu belirleyiniz.

ÇÖZÜM : Verilen polinomlara Euclid algoritması uygulanırsa

$$g(x) = f(x)(x + 1) + x + 3$$

$$f(x) = (x + 3)(x + 1)$$

elde edilir. $x + 3$ monik olduğundan $\text{ebob}(f(x), g(x)) = x + 3$ tür.

- (b) $d(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$ olacak şekilde $s(x)$ ve $t(x)$ polinomlarını belirleyiniz.

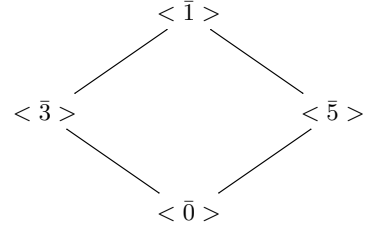
ÇÖZÜM : (a) da verilen eşitlikler yardımıyla $x + 3 = g(x).1 + f(x)(4x + 4)$ eşitliği elde edilir. Bu sebeple $s(x) = 4x + 4$ ve $t(x) = 1$ olur.

4. (a) R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $x = xyx$ olacak şekilde $y \in R$ varsa x e **regüler eleman** adı verilir. \mathbb{Z} tamsayılar halkasının bütün regüler elemanlarını belirleyiniz.

ÇÖZÜM : $x \in \mathbb{Z}$ regüler bir eleman olsun. Bu durumda $x = xyx$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $x(1 - yx) = 0$ dir. \mathbb{Z} tamsayılar halkası sıfır bölensiz olduğundan $x = 0$ veya $yx = 1$ elde edilir. Dolayısıyla \mathbb{Z} tamsayılar halkasının bütün **regüler** elemanları $-1, 0, 1$ dir.

- (b) R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının bütün maksimal ideallerinin kesişimine R nin **radikali** adı verilir. \mathbb{Z}_{15} halkasının radikalini belirleyiniz.

ÇÖZÜM : \mathbb{Z}_{15} halkasının idealleri



şeklindedir. Diyagramdan da görüldüğü gibi \mathbb{Z}_{15} halkasının maksimal idealleri $\langle \bar{3} \rangle$ ve $\langle \bar{5} \rangle$ dir. Bu sebeple \mathbb{Z}_{15} halkasının **radikali** $\langle \bar{3} \rangle \cap \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{0} \rangle$ dir.