MAT302 CEBİR II FİNAL SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

1. (a) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar halkasının bütün ideallerini belirleyiniz.

   ÇÖZÜM : $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar halkası bir cisimdir. Bir cismin yegane idealleri $\{0\}$ ve kendisi olduğundan $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar halkasının bütün idealleri $\{0\}$ ve $\mathbb{Q}$ dur.

   (b) $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ kümesinin matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka olduğu biliniyor. R halkasının karakteristiğini belirleyiniz.

   ÇÖZÜM : R halkasının çarpma işlemine göre birim elemanınının $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan $3\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ olduğundan R halkasının karakteristiği 3 tür.

2. (a) $f(x) = x^8 + 15x^6 + 10x + 5$ polinomu $\mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkasında indirgenmez midir? Araştırınız.

   ÇÖZÜM : $p = 5$ asalı için $5 \mid 5$, $5 \mid 10$, $5 \mid 15$, fakat $5 \nmid 1$ ve $5^2 \nmid 5$ şartları sağlandığından verilen $f(x)$ polinomu **Eisenstein İndirgenmezlik Kriteri** gereğince $\mathbb{Q}[x]$ polinomlar halkasında indirgenmezdir. Böylece $\mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkasında da indirgenmezdir.

   (b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bölüm halkası sıfır bölensiz midir? Araştırınız.

   ÇÖZÜM : $\frac{3}{2}+\mathbb{Z}$, $\frac{2}{3}+\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ için $(\frac{3}{2}+\mathbb{Z})(\frac{2}{3}+\mathbb{Z}) = \frac{6}{6}+\mathbb{Z} = 1+\mathbb{Z} = 0+\mathbb{Z}$ olması sebebiyle $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bölüm halkası sıfır bölenlere sahiptir.

3. $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $g(x) = x^3 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomları veriliyor.

   (a) $d(x) = ebob(f(x), g(x))$ polinomunu belirleyiniz.

   ÇÖZÜM : Verilen polinomlara Euclid algoritması uygulanırsa

   $$g(x) = f(x)(x+1) + x + 3$$
   $$f(x) = (x+3)(x+1)$$

   elde edilir. $x+3$ monik olduğundan $ebob(f(x), g(x)) = x + 3$ tür.

   (b) $d(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$ olacak şekilde $s(x)$ ve $t(x)$ polinomlarını belirleyiniz.

   ÇÖZÜM : (a) da verilen eşitlikler yardımıyla $x + 3 = g(x).1 + f(x)(4x + 4)$ eşitliği elde edilir. Bu sebeple $s(x) = 4x + 4$ ve $t(x) = 1$ olur.

4. (a) R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $x = xyx$ olacak şekilde $y \in R$ varsa x e **regüler eleman** adı verilir. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bütün regüler elemanlarını belirleyiniz.

   ÇÖZÜM : $x \in \mathbb{Z}$ regüler bir eleman olsun. Bu durumda $x = xyx$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $x(1-yx) = 0$ dır. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası sıfır bölensiz olduğundan $x = 0$ veya $yx = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bütün **regüler** elemanları $-1, 0, 1$ dir.

   (b) R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının bütün maksimal ideallerinin kesişimine R nin **radikali** adı verilir. $\mathbb{Z}_{15}$ halkasının radikalini belirleyiniz.

ÇÖZÜM : $\mathbb{Z}_{15}$ halkasının idealleri

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & <\bar{1}> \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ <\bar{3}> \arrow[dr, dash] & & <\bar{5}> \arrow[dl, dash] \\ & <\bar{0}> & \end{tikzcd}$$

şeklindedir. Diyagramdan da görüldüğü gibi $\mathbb{Z}_{15}$ halkasının maksimal idealleri $<\bar{3}>$ ve $<\bar{5}>$ dir. Bu sebeple $\mathbb{Z}_{15}$ halkasının **radikali** $<\bar{3}> \cap <\bar{5}> = <\bar{0}>$ dır.