2. VEKTÖRLER

Büyüklüğü ve yönü olan, aşağıdaki vektör toplam kurallarını sağlayan nesnelere vektör denir.

Toplam kuralları

1. $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ (Toplamaya göre değişme özelliği)

2. $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$ (Birleşme özelliği)

3. $\vec{A}+\vec{e}=\vec{e}+\vec{A}=\vec{A}$ ise $\vec{e}=\vec{0}$ (sıfır vektörü)

4. $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}=0$ ise $\vec{B}=-\vec{A}$ (vektörün tersi denir)

Skaler ile çarpım özellikleri

α bir skaler olmak üzere:

- $\alpha(\vec{A}+\vec{B})=\alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$
- $\vec{A}(\alpha+\beta)=\alpha\vec{A}+\beta\vec{A}$

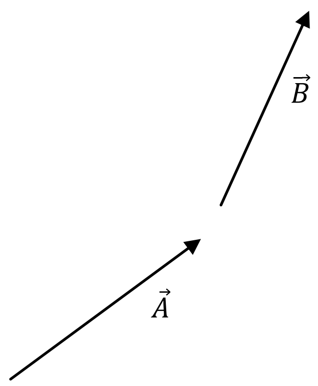
şeklinde yazılabilir.

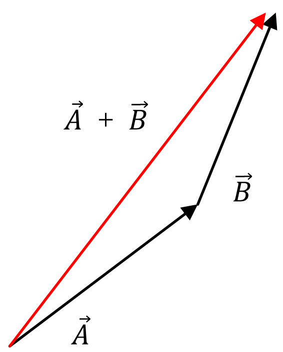
Bu özellikleri sağlayan nesnelere vektörler denir.

a) Vektörlerin Toplamı

$|\vec{A}|=A$ ifadesine $\vec{A}$ ' nın boyu veya büyüklüğü denir. A vektörü; $\vec{A}=A\hat{a}$ şeklinde gösterilebilir. $\hat{a}$ ifadesine birim vektör denir. A vektörü yönünde boyu 1 olan vektöre birim vektör denir ve $\hat{a}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ şeklinde ifade edilir.

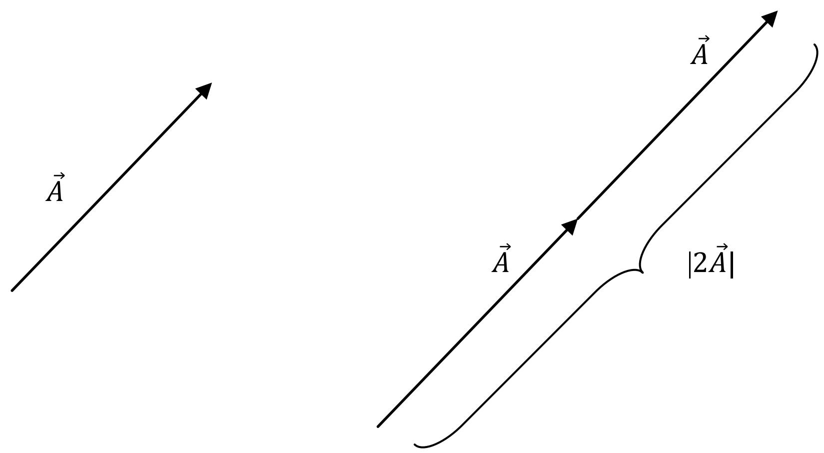
Aşağıdaki şekilde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin toplamının geometrik gösterimi görülmektedir. Vektörler boyları ve yönleri değişmeyecek şekilde düzlem üzerinde kaydırılabilir.





b) Skaler ile Çarpım

Bir $\vec{A}$ vektörü düşünelim ve bunu α gibi bir skaler ile çarpalım. α = 2 ise vektörün skaler ile çarpımı; geometrik olarak şekildeki gibi gösterilebilir.



c) İki Vektörün Birbiriyle Çarpımı

a) İki vektörün nokta (skaler, iç) çarpımı

b) İki vektörün vektörel çarpımı

i) Kartezyen koordinatlarda iki vektörün skaler çarpımı

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}).(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$$

$$= A_xB_x(\hat{x}.\hat{x}) + A_xB_y(\hat{x}.\hat{y}) + A_xB_z(\hat{x}.\hat{z})$$

$$+ A_yB_x(\hat{y}.\hat{x}) + A_yB_y(\hat{y}.\hat{y}) + A_yB_z(\hat{y}.\hat{z})$$

$$+ A_zB_x(\hat{z}.\hat{x}) + A_zB_y(\hat{z}.\hat{y}) + A_zB_z(\hat{z}.\hat{z})$$

$$\hat{x}.\hat{x} = \hat{y}.\hat{y} = \hat{z}.\hat{z} = 1$$

$$\hat{x}.\hat{y} = \hat{x}.\hat{z} = \hat{y}.\hat{x} = ... = 0$$

olduğundan dolayı;

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$= \sum_{i=1}^{3} A_iB_i$$

olarak elde edilir. En genel ifadesi ile skaler çarpım;

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \mid \vec{A} \mid\mid \vec{B} \mid cos\theta(\vec{A}, \vec{B})$$

şeklinde verilir.

ii) İki vektörün vektörel çarpımı

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \times (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$$

$$= A_xB_x(\hat{x} \times \hat{x}) + A_xB_y(\hat{x} \times \hat{y}) + A_xB_z(\hat{x} \times \hat{z})$$

$$+ A_yB_x(\hat{y} \times \hat{x}) + A_yB_y(\hat{y} \times \hat{y}) + A_yB_z(\hat{y} \times \hat{z})$$

$$+ A_zB_x(\hat{z} \times \hat{x}) + A_zB_y(\hat{z} \times \hat{y}) + A_zB_z(\hat{z} \times \hat{z})$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = \mid \hat{x} \mid\mid \hat{x} \mid sin\theta(\hat{x}\hat{x})\hat{c}$$

Burada ĉ; hem $\vec{A}$ hem de $\vec{B}$' ye dik olan birim vektördür. x̂ ile x̂ arasındaki açının sinüsü sıfır olacağından;

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$$

olacaktır. Benzer şekilde;

$$\hat{x} \times \hat{y} = \mid \hat{x} \mid\mid \hat{y} \mid sin(\frac{\pi}{2})\hat{z} = \hat{z}$$

olarak bulunur. Diğer terimler de;

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} = -\hat{y} \times \hat{x}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} = -\hat{z} \times \hat{y}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} = -\hat{x} \times \hat{z}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikler, genel çarpım ifadesinde yerine koyulursa;

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{y}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{z}(A_xB_y - A_yB_x)$$

şeklinde bir ifade elde edilir ve bu ifade kısaca;

$$\mathbf{X} = det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

şeklinde matris formunda yazılabilir.

Soru:

$$\vec{a}+\vec{b}=11\hat{x}-\hat{y}+5\hat{z}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=-5\hat{x}+11\hat{y}+9\hat{z}$$

vektörleri veriliyor.

a) $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini bulunuz.

b) $\vec{a}$ ile $\vec{a}+\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı nedir?