Sabit Katsayılı Homogen Denklemler

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{1}$$

sabit katsayılı homogen denklemini ele alalım. $y(x)=e^{rx}$ (1) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} a_0r^ne^{rx}+a_1r^{n-1}e^{rx}+...+a_{n-1}re^{rx}+a_ne^{rx} &= 0 \\ e^{rx}\left(a_0r^n+a_1r^{n-1}+...+a_{n-1}r+a_n\right) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $e^{rx}\neq 0$ olduğundan

$$a_0r^n+a_1r^{n-1}+...+a_{n-1}r+a_n=0$$

olur. (2) denklemine (1) denkleminin karakteristik denklemi denir. (2) denkleminin köklerinin yapısına göre çözüm yazılır. Şimdi, ikinci basamaktan sabit katsayılı homogen

$$y''+ay'+by=0 \tag{2}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. (2) diferensiyel denklemine ilişkin karakteristik denklem

$$r^2+ar+b=0$$

şeklindedir.

Durum 1. Kökler reel ve birbirinden farklı ise, $(r_1,\, r_2\in\mathbb{R},\ r_1\neq r_2)$

$$y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$$

genel çözümü elde edilir.

Durum 2. Kökler reel ve birbirine eşit ise, $(r_1=r_2=r)$

$$y(x)=(c_1+c_2x)\,e^{rx}$$

genel çözümü elde edilir.

Durum 3. Kökler eşlenik kompleks ise, $(r_{1,2}=a\pm ib)$

$$y(x)=e^{ax}\left(c_1\cos bx+c_2\sin bx\right)$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek 1.

$$y'''-y''-2y'=0$$

diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denkleme ilişkin karakteristik denklem ve kökleri

$$r^3-r^2-2r=0$$

$$r_1=0,\ r_2=2,\ r_3=-1$$

şeklindedir. O halde, verilen denklemin genel çözümü

$$y\left(x\right)=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-x}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.

$$y^{''}+4y^{'}+5y=0$$

diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denkleme ilişkin karakteristik denklem ve kökleri

$$r^2+4r+5=0$$

$$r_{1,2}=-2\pm i$$

şeklindedir. O halde, verilen denklemin genel çözümü

$$y\left(x\right)=e^{-2x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)$$

olarak bulunur.

Örnek 3.

$$y^{(4)}-2y^{'''}+2y^{''}-2y^{'}+y=0$$

diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denkleme ilişkin karakteristik denklem ve kökleri

$$r^4-2r^3+2r^2-2r+1=0$$

$$r_1=r_2=1,\ r_{3,4}=\pm i$$

şeklindedir. O halde, verilen denklemin genel çözümü

$$y\left(x\right)=\left(c_1+c_2x\right)e^x+c_3\cos x+c_4\sin x$$

olarak bulunur.

Örnek 4.

$$y^{(4)}-4y^{'''}+14y^{''}-20y^{'}+25y=0$$

diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denkleme ilişkin karakteristik denklem ve kökleri

$$r^4-4r^3+14r^2-20r+25=0$$

$$r_{1,2}=1+2i,\ \ r_{3,4}=1-2i$$

şeklindedir. O halde, verilen denklemin genel çözümü

$$y\left(x\right)=e^x\left[\left(c_1+c_2x\right)\cos 2x+\left(c_3+c_4x\right)\sin 2x\right]$$

olarak bulunur.