1.3. Bağımsız Olaylar ve Koşullu Olasılık

 bir olasılık uzayı ve  için  olsun.  sigma cebiri üzerinde  küme fonksiyonu,



şeklinde tanımlanan  küme fonksiyonu bir olasılık ölçüsüdür. Gerçekten,  bir olasılık ölçüsü olup her  için  ve  için  olduğu açıktır. Diğer taraftan,  olup  dir. Son olarak,  için  için  ler ayrık olayların bir dizisi olsun. Bu durumda,  olaylar dizisi de ayrıktır. Buradan,



elde edilir. Dolayısı ile,  küme fonksiyonu bir olasılık ölçüsüdür. Bu olasılık ölçüsüne,  olayına göre koşullu olasılık ölçüsü denir.

**Tanım 1.3.1**  bir olasılık uzayı ve  olsun. Yukarıdaki şekilde tanımlanan  olasılık ölçüsü için,  sayısına  bilindiğinde  nın *koşullu olasılığı* denir

 koşullu olasılığı için genellikle  gösterimi kullanılır. Tanıma göre,  verildiğinde  olayının koşullu olasılığı  dir. Buradan,  olayının olasılığı  şeklinde hesaplanabilir.

 olayları  ve  şeklinde yazılabilir (Şekil (1.3.1)). Ayrıca,  ve  ayrık olaylar olup  ve  olmak üzere,



dir.

1

*Şekil: 1.3.1 Bir olayın ayrık olaylar türünden yazılması*

Daha genel olarak,  olayları  örnek uzayının bir parçalanması olsun (yani, ler ayrık ve ). Eğer  için  ise herhangi bir  olayının olasılığı,



şeklinde hesaplanır.  olayları  örnek uzayının bir parçalanması olmak üzere herhangi bir  olayı,



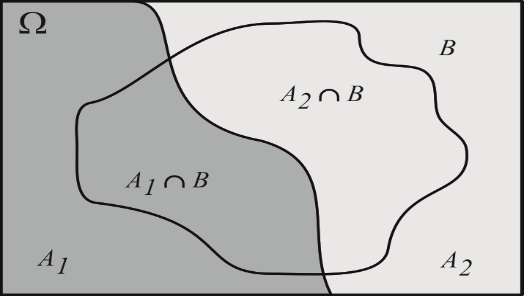
olarak yazıldığında, *Bayes formülü* olarak da bilinen  koşullu olasılığı



şeklinde hesaplanır.

**Örnek 1.3.1** İki kavanozdan birincisinde 5 sarı 5 de mavi top vardır. İkinci kavanozda ise 10 sarı 5 mavi top vardır. Birinci kavanozdan rasgele bir top çekilip ikinci kavanoza atılıyor. Daha sonra ikinci kavanozdan bir top çekiliyor. İkinci kavanozdan çekilen topun mavi olduğu verildiğinde, birinci kavanozdan çekilen topun mavi olması olasılığını hesaplayalım.

Kavanozlar  ve  olsun. ,  ve  olaylarını tanımlayalım.



*Şekil: 1.3.2 Bir olayın ayrık olaylar türünden yazılması*

 ile ayrık ve  olduğundan  ve ,  nın bir parçalanmasını oluşturur. Buradan herhangi bir  kümesi (),



şeklinde yazılabilir (Şekil (1.3.2)). Buna göre  olayının olasılığı da,



olarak hesaplanmış olur. Dolayısı ile aranan olasılık



dir.

Şimdi deneyi değiştirelim. Rasgele bir kavanoz seçip bu kavanozdan bir top çekelim. Çekilen topun mavi olduğu verildiğinde bunun birinci kavanozdan çekilmiş olması olasılığını hesaplayalım. Kavanozlar  ve  olmak üzere bu olaylar (Şekil (1.3.2))

, 

şeklinde yazılır. Yine,  ile  ayrık olaylar olup  dir.  ve  olayları  örnek uzayının bir parçalanması olduğundan herhangi bir  için  olayını



şeklinde yazabiliriz. Buna göre,  olayının olasılığı



olup aranan olasılık bu defa,



olur

**Tanım 1.3.1**  bir olasılık uzayı olsun.  olayları için  ise  ve  olayları *bağımsızdır* denir.  için  olmak üzere,

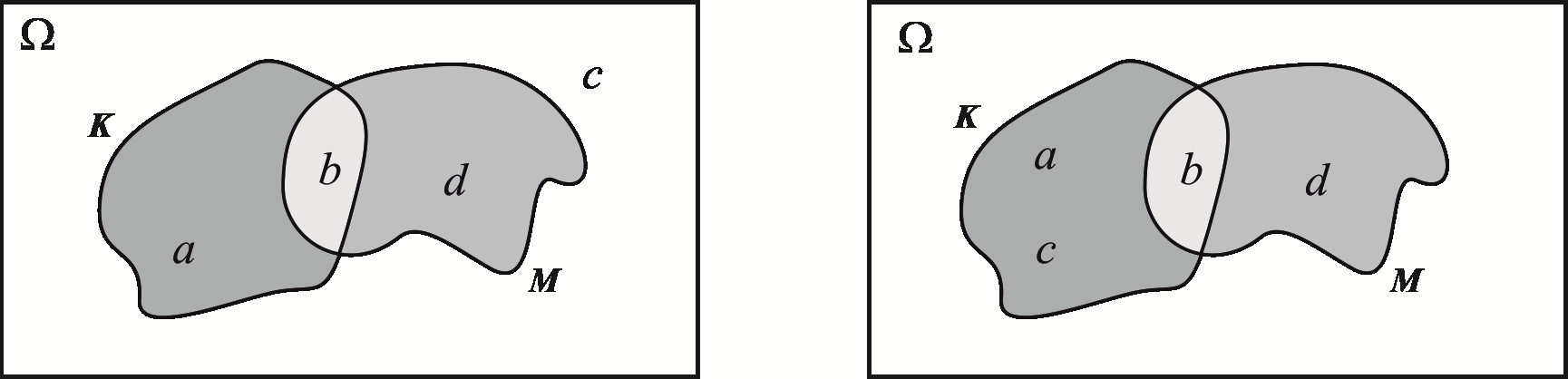


oluyorsa,  olayları li bağımsızdır denir

**Örnek 1.3.2**  ve  olsun.  sigma cebiri açık olarak



şeklinde yazılır.  için  denirse  bir olasılık uzayı olur. ve  olayları için  dir.  olup  dür. Buradan,  olup  ve  olayları bağımsızdır.



*Şekil: 1.3.3 Bağımlı ve bağımsız olaylar*

Ancak  ile  olayları bağımsız değildir.  olup, ,  ve  dir. Buradan



dir. Yani,  ve  olayları bağımsız değildir

**Örnek 1.3.3**  bir olasılık uzayı ve  olsun.  ve  bağımsız ise,

a)  b)  c) 

olayları da bağımsızdır.

a)  ve  ayrık olaylardır. Dolayısı ile,



eşitliği düzenlendiğinde



bulunur. Buradan,  olayları bağımsızdır.

b) Benzer şekilde,  olduğundan yine  ayrık olaylar olup  dir. Buradan,



olduğundan,  olayları bağımsızdır.

c)  olaylarının bağımsızlığı için  olduğunun gösterilmesi gerekir. Kolayca görüleceği gibi,





dir. Yani,  olayları bağımsızdır

**Örnek 1.3.4**  bir olasılık uzayı olsun.  ile  nin herhangi bir  olayı ile bağımsız olduğu



ve



eşitliklerinden açıktır

**Teorem 1.3.1**  bir olasılık uzayı ve  için  olsun. Bu durumda,

**a) ** ise ****

b)  olayları bağımsız ve  ise 

dir.

*İspat*a)  olduğundan



yazılır.  yakınsak () ise serinin kalan terimi sıfıra gider. Yani,  iken,  dır. Buradan  iken,



elde edilir. O halde,  dır.

b)Önce,  için  olduğunu hatırlayalım. Ayrıca,  dizisinin üst limitinin tanımı ile  dizisinin artan olduğu dikkate alındığında,



yazılır. Diğer taraftan,  ler bağımsız olaylar ise  ler de bağımsızdır. Buradan,



elde edilir.  olduğundan ıraksak bir serinin kalan terimi sonsuza gider. Yani,  iken  olup  olur. Buradan,  iken



yazılır. O halde,



olduğu dikkate alındığında,  iken,



olup,  elde edilir

1.4. Permütasyonlar ve Kombinasyonlar

1.4.1 Permütasyonlar

Olasılık hesaplarında çok kullanılan kavramlardan biri de hiç şüphesiz nesnelerin tamamının ya da belli bir kısmının farklı sıralanmalarının sayısıdır. *Permütasyonun* Latince’de “*yer değiştirme*” anlamına gelen “*permütare*” sözcüğünden türediği sanılmaktadır (Oruç, 1982). Örneğin , ve  gibi üç nesnenin değişik sıralamaları , , , ,  ve  şeklinde olacaktır. Yani, değişik sıralamaların sayısı 6 dır. Benzer şekilde, bu üç nesnenin ikişerli sıralamaları, ,  ve  şeklinde olabilir. Ancak, önce  sonra  sıralaması () ile önce  sonra  sıralamaları farklı ise, sıralamalar; , , , ,  ve  şeklinde olur. Bu durumdaki sıralamaların sayısı ise 6 dır.

Dört öğretim üyesi arasında üç kişilik bir jüri oluşturmak istendiğini düşünelim. Bu dört öğretim üyesi , ,  ve  olarak adlandırılmış olsun. Bu durumda,  sıralaması ile  aynı olacağından olası jüri üyeleri , ,  ve  şeklinde olabilir. Yani, dört farklı şekilde jüri oluşturulabilir. Ancak, ilk seçilen jüri başkanı olacak denirse,  ile  farklı olacaktır. Bu durumda, farklı oluşumlar , , ,  şeklindedir (sayısı 12). Burada, sonraki seçilen iki kişi arasındaki sıralama önemli değildir. Bunların uzun uzun yazılması yerine, farklı oluşumların toplam sayılarının formülize edilmesi gerekir.

**Tanım 1.4.1 a)** 1 den  ye kadar pozitif tam sayıların çarpımına  *faktöriyel* (ya da  çarpansal) denir ve  ile gösterilir.

**b)** Nesnelerin kümesinin bir kısmının ya da tamamının belli bir sıralanmasına (ya da düzenlenmesine) *permütasyon* denir

Tümü birlikte kullanılan  nesnenin permütasyonları sayısı  dir. Bu sayı  ile gösterilmiştir.  nesneden bir defada alınan  nesnenin permütasyonları (sıralanmalarının) sayısı ise  ile gösterilir.

 nesneden  tanesi  tane kutucuğa yerleştirilmek istensin. Bu durumda birinci kutucuğa  nesneden herhangi biri yerleştirilebilir (yani ilk kutucuk için  farklı seçim yapılabilir). Sonra ikinci kutucuk, geri kalan  nesneden herhangi biri ile doldurulabilir (yani, ikinci kutucuk için  farklı seçim yapılır). Böyle devam edilirse, son kutucuk için geri kalan  nesneden biri ile doldurulur. Buna göre, farklı sıralamaların sayısı



olur. Elimizde bulunan  nesnenin ya hepsi farklıdır, ya da bazıları aynıdır. Buna göre,  nesnenin permütasyonlarının sayısı için bu iki durum farklı değerlendirilmelidir.

a) Birbirinden farklı  nesnenin permütasyonları sayısı:  ise, bu nesne bir tek biçimde yazılabilir ve permütasyon sayısı  dir. Yani,  dir. Şimdi,  olsun. Bu nesneler  ve  ise, sıralamalar,  ve  şeklinde olup, sayısı 2 dir. Yani, 2 nesnenin permütasyonları sayısı  dir.  için sıralamalar; ,,,, ve  şeklinde olur ve sayısı  dır. Tümevarım yöntemine göre,  nesnenin permütasyonları sayısı  olsun. .nci nesne geri kalan  nesne arasına  farklı şekilde yerleştirilebilir. O zaman, çarpma kuralı gereğince, bu sıralamaların sayısı da  olur. Bu değer de  dir.

b) Şimdi,  nesneden  tanesi bir tür, geri kalanlardan  tanesi başka bir tür olmak üzere,  tanesi de başka bir türden nesne olsun. Yani, bu  nesne  farklı türden oluşsun. Bu durumda,  ve  olduğu açıktır. Buna göre,  tane nesne aynı olduğundan sıralanışta  tane sıralanış aynı, benzer nedenle  sıralanış aynı olacaktır. Böylece,  nesnenin permütasyonları sayısı  olur.

**Örnek 1.4.1**  ve  rakamlarının tümü kullanılarak toplam  farklı sayı yazılabilir. Bunlardan;

a) Kaç tanesinde çift rakamlar tek rakamlardan önce gelir? Bu rakamlar dizisi içinde 3 tane tek (1,3 ve 5), 2 tane (2 ve 4) de çift rakam vardır. Çift rakamlar kendi aralarında 2! sayıda sıralanır. Sonra tek rakamlar da kendi aralarında 3! farklı şekilde sıralanabilir. O zaman toplam sayı 2!(3!)=12 dir. Bu sayılar,

24135 24153 24315 24351 24513 24531

42135 42153 42315 42351 42513 42531

şeklindedir.

b) Kaç tanesinde 2, 1 den hemen sonra gelir? (1,2) ikilisi beraber alınarak, toplam dört rakam varmış gibi düşünüldüğünde, farklı permütasyonların sayısı  dür.

c) Kaç tanesinde 2 rakamı 1 den önce gelir? Permütasyonlar içinde, 1 in 2 den önce geldiği sayıda 2 de 1 den önce gelir. O zaman aranan cevap,  dır.

d) kaç tanesinde 1 ve 2 rakamları 3 ve 4 rakamlarından önce gelir? Önce, 1, 2, 3 ve 4 rakamları kendi aralarında 4! Sayıda sıralanır. Oysa, toplam 5 tane rakam vardır. Koşullara uyan sıralamalar

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 2 3 4 | 1 2 4 3 | 2 1 3 4 | 2 1 4 3 |

olup 5 rakamının nereye geldiği önemli değildir. Buradaki her bir sıralama için 5 rakamı her bir sıralamadaki 5 farklı yere gelebilir. O zaman aranan sıralamaların sayısı 4(5)=20 dir. e) Kaç tanesinde 1, 2 den önce, 2 de 3 den önce gelir? 1,2 ve 3 rakamlarının permütasyonları sayısı 3!=6 dır. O halde toplam sayı (5!/3!)=20 dir.

f) Beş basamaklı sayılardan kaç tanesinde ilk iki rakamın toplamı 6 dan küçüktür? Bunun için,

Birinci yerde 1 varsa, ikinci yer için 3 seçim (2,3,4) yapılabilir,

Birinci yerde 2 varsa, ikinci yer için 2 seçim (1,3) yapılabilir,

Birinci yerde 3 varsa, ikinci yer için 2 seçim (1,2) yapılabilir

Birinci yerde 4 varsa, ikinci yer için 1 seçim (1) yapılabilir.

İlk iki basamağa yazılacak rakamlar önemli olup diğerlerinin sıralaması önemli değildir. İlk iki basamak doldurulduktan sonra geriye kalan 3 rakam (3! faklı şekilde yazılabilir) herhangi bir şekilde doldurulur. O zaman aranan sayı (3+2+2+1)3!=48 dir.

g) Rakamlar yinelenmeden 4 basamaklı kaç sayı yazılabilir? Bunun için, birinci yere herhangi bir rakam (5 tanesinden biri) yazılır. Yani, birinci yer 5 farklı şekilde doldurulur. İkinci yer geri kalan 4 tanesinden biri ile, üçüncü yer geri kalan 3 tanesinden biriyle ve son yer de geri kalan 2 rakamdan biri ile doldurulur. Aranan sayı 5.4.3.2=120 dir.

h) Rakamlar yinelenebilir ise 4 basamaklı 625 sayı yazılabilir. Yani, birinci yer 5 farklı şekilde doldurulabilir. Aynı şekilde ikinci yer de 5 farklı şekilde doldurulabilir.

i) Rakamlar yinelenmeden 4 basamaklı tek sayıların sayısını bulalım. O zaman, elde edilecek sayı tek olacağından son basamak 3 farklı şekilde (1 3 ve 5) doldurulabilir. Birinci yer geri kalan 4 rakamdan biri ile, ikinci yer geri kalan 3 rakamdan biri ile ve üçüncü yer de geri kalan 2 rakamdan biri ile doldurulur. Yani, toplam sayı (4)(3)(2)(3)=72 dir.

j)  nesneleri kaç farklı şekilde sıralanabilir. Dört faklı türden 10 nesne vardır. Buna göre, farklı sıralamaların sayısı için,  ve  olup permütasyonların sayısı



dür

Bir çember üzerindeki *n* farklı nesnenin permütasyonları sayısı (n-1)! dir. Örneğin, yuvarlak bir masa etrafına 4 kişi (4-1)!=6 farklı şekilde sıralanabilir. Burada, insanların saat yönünde hareket ettiği düşünülürse, bir kişi sabit tutularak diğerlerinin birer kaydırılması ile aranan permnütasyonların sayısı bulunur.

1.4.2 Kombinasyonlar

**Tanım 1.4.2** Birbirinden farklı  nesne verilmiş olsun. Bu  nesneden  tanesinin farklı çekiliş sayısına  nesnesin  li *kombinasyonu* denir

Tanımdan da anlaşılacağı gibi, burada iki durum vardır. 1) çekilen nesne geri konmadan (iadesiz) yeni bir çekiliş yapılır ya da 2) çekilen yerine konup (iadeli) yeni bir çekiliş yapılır.

***1)*** ***İadesiz (Yinelemesiz) Kombinasyon***:  nesneden  tanesi seçilmek istensin.  ise  nesne içinde  farklı şekilde seçim yapılabilir.  için nesneleri , ,…, ile gösterelim. Buna göre seçimler,

, , ,…,

şeklinde olup sayısı  dir.  olsun. İlk çekilişte  den biri çekilir. Geriye  nesne kalır.  nesneden -li  kombinasyon yapılabilir.  nesnenin -lü kombinasyon sayısı  olur. O halde,  nesnenin -li kombinasyonlarının sayısının



olduğunu kabul edelim ve -li kombinasyonlarının sayısını bulalım.  nesnenin -li kombinasyonlarının sayısı  dir. Geriye  nesne kalır.  nesnenin -li kombinasyonlarının sayısı,



dir. Bu son ifadenin her iki tarafı  ile çarpılırsa,



sayısı,  nesnenin -li kombinasyon sayısı olur. Herhangi bir nesnenin çekiliş sırası önemli değilse, her  çekiliş aynı olacağından aranan sayı,



dir.

***2)*** ***İadeli (Yinelemeli) Kombinasyon***  ve  rakamları ile kullanılan rakam bir daha kullanılmamak üzere  basamaklı sayı yazmak isteyelim. Bunların sayısının



olduğunu biliyoruz. Bu sayılar; 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43 dir. Kullanılan rakam bir daha kullanılabilir ise, 11, 22, 33 ve 44 sayıları da buna eklenmelidir. O zaman toplam sayı 16 olur. Yani,  tane farklı sayı yazılabilir. Yinelemeli kombinasyonda, iki farklı durum (sıra önemli ve sıra önemsiz) ayrı ayrı değerlendirilmelidir.

Birbirinden farklı  nesneden  tanesinin çekiliş sayısı,  nesnenin  li kombinasyonu olup sayısı  veya  dir.  nesne  yolla düzenlenebileceğinden,  kombinasyonlarından herbiri için  permütasyon olduğundan permütasyonların sayısı  olur. Ayrıca,  dir.

**Örnek 1.4.2 a)** Dört kişi arasından üç kişiden oluşan bir komisyon seçilmek isteniyor. Bu dört kişi  ve  olsun. Bu oluşumlar,  ve  şeklinde olur. Bunlar kendi aralarında  şekilde sıralanabilir. Örneğin, , kişileri kendi aralarında , , , ,  ve  şeklinde sıralanabilir. Burada  ile  aynı komisyondur. Bu dört kişiden oluşacak üçlü kombinasyon ve permütasyonlar aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

|  |  |
| --- | --- |
| Kombinasyonlar | Permütasyonlar |
|  |  |

Burada, kombinasyonların sayısı,



permütasyonların sayısı (yani sıralama önemli) ise,



olup,  dir.

**b)** 4 Fizikçi, 4 Kimyacı ve 2 Biyolog arasından 3 kişilik bir komisyon. hiç bir koşul olmadan  farklı şekilde seçilebilir.

**i)** Kurulda en az 1 biyolog olacak şekilde kaç farklı seçim yapılabilir. Bunun için önce hiç biyolog bulunmaması durumunu hesaplayalım. Kurulda 3 fizikçi olabilir, 3 kimyacı olabilir, 2 fizikçi 1 kimyacı veya 1 fizikçi 2 kimyacı olabilir. Buna göre,

3 fizikçi 

3 kimyacı 

2 fizikçi, 1 kimyacı 

2 kimyacı 1 fizikçi 

farklı şekilde seçilebilir. Bunların toplam sayısı 56 olup, en az 1 biyolog bulunduran kombinasyonların sayısı  dür.

**ii)** Kurulda her branştan 1 kişinin olabileceği kombinasyonların sayısı ise



dir

 nesnenin  tanesi birinci çeşit,  tanesi ikinci çeşit ve  tanesi de nci çeşit olsun. Yani, nesnelerim tümü birbirinden farklı olmasın. Bu durumda,  olmak üzere, tümü birlikte alınan  nesnenin permütasyonları sayısı,



dir.  ve  pozitif tamsayılar olmak üzere  için,  dir (Pascal kuralı). Yani,





dir.

**Örnek 1.4.3 a)** 52 lik bir oyun kağıdı 4 oyuncuya



farklı şekilde dağıtılabilir.

**b)** 2 kırmızı, 3 siyah ve 5 beyaz top sıraya dizilmek istensin. Aynı rekli toplar benzer ve aynı büyüklüktedir. Bu toplar,  ve  olmak üzere bu toplar,



farklı şekilde sıraya dizilebilir.

**c)**  tane  ve  tane  ile, her dizide  ların tümü kullanılmak üzere  ve  lerden kaç farklı dizi oluşturulabilir.

dizide  tane  ve  tane  ile 

dizide  tane  ve  tane  ile 

dizide  tane  ve  tane  ile 

……

dizide  tane  ve  tane  ile 

farklı dizi oluşturulabilir. Bunların toplam sayısı ise Pascal kuralına göre,



dir.

**d)** Bir sınıfta 12 kız ve 10 erkek öğrenci vardır. Sınıf, kızlar ve erkekler boy uzunluklarına göre sıralanacak biçimde kaç farklı yolla düzenlenebilir.

Kızlar ve erkekler kendi aralarında permütasyona tabii olmayacağından birbirinin benzeri gibi düşünülebilir. Buna göre 22 nesnenin permütasyonu,



dir

Bir  kümesinde  tane nesne bulunsun.  kümesinin  formunda farklı parçalanmalarının sayısı,  de ,  de  ve  de  nesne ve  olmak üzere,



dir. Şimdi bunu gösterelim. Önce, nesnelerden  içine  farklı seçim yapılabilir. Sonra, geri kalan  nesneden  içine  tane nesne  farklı seçim yapılabilir. Bu şekilde devam ettiğnde,  için  içine  tane nesne  farklı şekilde seçilebilir. O halde,  nın farklı parçalanmalarının sayısı  olduğundan,



dir.

**Örnek 1.4.4 a)** 10 oyuncak 3 kardeş arasında en küçüğü 4 diğerleri üçer tane olmak üzere



farklı şekilde dağıtılabilir.

b) Bir kavanozda 1 den 7 ye kadar numaralandırılmış 7 top vardır. Önce 2 sini sonra 3 ünü en sonunda da 2 sini olmak üzere kaç farklı şekilde seçebiliriz. Başka bir ifade ile, 7 top 2 si  kutusuna, üçü  kutusuna ve geri kalan ikisi de  kutusuna kaç farklı şekilde yerleştirilebilir. Burada,  ile farklı olduğundan bunlar sıralı parçalanmalardır. Buna göre, 7 toptan 2 si  kutusuna  farklı şekilde, geri kalan 5 toptan üçü  kutusuna  farklı şekilde ve son ikisi de  kutusuna  farklı şekilde yerleştirilir. Yani, toplam sayı,



dur

***Sırasız Parçalanma*** a) Bir sınıfta 12 öğrenci vardır. Her takımda 4 öğrenci olacak şekilde 12 öğrenci , ve  gruplarına ayrılmak istensin. Öğrencilerin her bir  parçalanma sayısı 3!=6 dır. Buna göre, farklı parçalanmaların sayısı,



dir.

b) 10 öğrenci, biri 4 diğerleri üçer kişilik 3 gruba kaç farklı şekilde ayrılabilir. Burada,  grubu ile  grupları aynıdır. Buna göre farklı parçalanmaların sayısı,



dür

***Binom Teoremi:***  pozitif bir tamsayı olmak üzere,



dir. Buradaki,  katsayılarına *Binom katsayıları* denir. Eşitlikte  alınırsa,



elde edilir. Ayrıca,  denirse,



bulunur. Birinci eşitlikten ikinci eşitlik çıkartılırsa ( tek)



iki terimin taraf tarafa toplanması ile ( çift)



elde edilir. Burada  nin tek veya çift olması dikkate alınmalıdır. Diğer taraftan,



ya da,



olup, eşitlikte  alındığında



eşitliği elde edilmiş olur.

1.5. Çözümlü Problemler

**1.5.1** ,  ve olsun. Buna göre,  bir olasılık uzayıdır.  nın alt kümelerinden oluşan iki dizi



olarak verildiğinde,  ve  olasılıklarını hesaplayınız.

*Çözüm***:** Her  için  ve  olduğu



önermesinden açıktır. Yani,



olup  dizisi artandır. Benzer şekilde  dizisi de azalandır. Teorem (1.2.2) ye göre,  ve  dizilerinin limitleri vardır ve  ve  dir. Buna göre,



ve



elde edilir.

**1.5.2**  boş olmayan bir küme,  da  üzerinde bir sigma cebir olsun.  için,



şeklinde tanımlanan  sınıfının  üzerinde bir sigma cebir olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*:  sınıfının bir sigma cebir olması için Tanım (1.1.3) deki sigma cebir olma koşullarını sağlanması gerekir. Şimdi bu koşulları inceleyelim.

(i)  ve  olduğundan,  dir.

(ii) Şimdi,  deki her elemanın tümleyeninin de (tümleme  ye göre)  de olduğunun gösterilmesi gerekir.  ise  olacak şekilde bir  vardır. O halde,  nın  ye göre tümleyeni (bunu  ile gösterelim) de bu sınıfta olmalıdır. Bunun için,  olup,  olduğundan,  dir.

(iii)  deki elemanların sayılabilir birleşimleri de  de olmalıdır. Bunun için  için  olsun. O zaman  olacak şekilde  küme dizisi vardır. Ayrıca,



olarak yazılabildiğinden,  dir. Dolayısı ile,  sınıfı,  üzerinde bir sigma cebirdir.

**1.5.3** bir olasılık uzayı,  olacak şekilde dört olay  olsun. Gösteriniz ki,



dir.

*Çözüm***:**   denirse,



yazılır. Şimdi  denirse,



olur. Son olarak,  olup sonuçlar birleştirildiğinde,



şeklinde aranan eşitlik elde edilmiş olur.

**1.5.4** a) bir olasılık uzayı,  bağımsız ve ,  olsun. ,  ve  olasılıklarını hesaplayınız.

b) bir olasılık uzayı,,  ve  olacak şekilde  bağımsız olaylar olsun. Buna göre,  olasılığını hesaplayınız.

c) bir olasılık uzayı,  olacak şekilde ,  ve  bağımsız olaylar olsun.  olasılığını hesaplayınız.

*Çözüm*: a)  bağımsız olduğundan Örnek (1.3.3) den  ,  ve  ile  bağımsız olaylardır. Buradan aranan olasılıklar







şeklinde bulunur.

b) Bu olasılık doğrudan





olarak hesaplanmıştır.

c) Önce  olduğunu hatırlayalım.  denirse aranan olasılık  haline dönüşür. O zaman aranan olasılık,





dir.

**1.5.5**  bir olasılık uzayı ve  olsun.  ise  olayı  olayına göre *itici olay* denir. Ayrıca,  ise  olayı  olayına göre *çekici olay* denir.

a)  olayı  olayına göre çekici ise,  olayının da  olayına göre çekici olduğunu gösteriniz

b)  olayı  olayına göre çekici ise,  olayının  olayına göre itici olduğunu gösteriniz.

*Çözüm****:*** a) ise  olayı  ye göre çekicidir.  olayı  ye göre çekici ise  olup, koşullu olasılığın tanımından



yazılır. Yani,  olayı da  ya göre çekicidir.

b)  olayı  ye göre çekici ise,  olduğunun gösterilmesi gerekir.  olayı  ye göre çekici ise,  dir. Koşullu olasılığın tanımından



dir. Buradan,  yazılır. Ayrıca,



elde edilir. Yani,  olayı  ya göre iticidir.

**1.5.6**  bir olasılık uzayı ve  olmak üzere,  olsun.  ve  ise  olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*:  ve  olup

 ve 

dir. Diğer taraftan,



ve



olacağından



eşitsizliği elde edilir. Yani  dir.

**1.5.7** bir olasılık uzayı ve  olsun.  ise  ve  olaylarının bağımsız olduğunu gösteriniz.

*Çözüm***:**  ise  olduğunun gösterilmesi gerekir.  olup  ile  ayrık olaylardır. Buradan,



elde edilir. Ayrıca,



dir. Buradan da,



olup  elde edilir. Yani,  olayları bağımsızdır.

**1.5.8** bir olasılık uzayı ve ve  olacak şekilde bağımsız iki olay  ve  olsun.  ise  olasılığını hesaplayınız.

*Çözüm***:**  ve  bağımsız olduğundan ise **** olduğu açıktır. Dolayısı ile,  dır. Buradan



yazılır.  denirse,  ikinci dereceden polinomu elde edilir. Bu denklemin çözümleri ise,  ve  olur.  ve  olduğundan  elde edilir.

*İkinci yol*: Bu soruyu başka bir yoldan aşağıdaki şekilde de çözebiliriz.  ve  ile  bağımsız ( )olduğundan



olur. Buradan da,  olup,  dir. Yani,

 veya 

bulunur.  olduğundan  olmalıdır. Dolayısı ile ikinci eşitlik dikkate alınmalıdır. Buradan da,  elde edilir.

**1.5.9** bir olasılık uzayı ve  bağımsız olaylar olsun. Bu durumda,  ve  ise  olasılığını  türünden hesaplayınız.

*Çözüm*:  olasılığı açık olarak,



şeklinde yazılır. Buradan ,  ikinci dereceden denkleminin çözümüdür. Yani,  dir. Ayrıca,  bir olasılık olduğundan  den büyük olamaz ve  dir.

**1.5.10** Bir ürün birbirinin aynısı ,  ve  makineleri tarafından üretiliyor.  makinesi tarafından üretilenlerin %5 nin,  makinesi tarafından üretilenlerin %4 nün ve  makinesi tarafından üretilenlerin %3 nün hatalı olduğu bilinmektedir. Seçilen bir gün içinde üretilen ürünlerin  i  makinesinden,  u  makinesi tarafından ve  i de  makinesi tarafından üretilmiştir. Bu gün içinde üretilen ürünlerden rasgele seçilen bir ürünün hatalı olduğu gözlendiğinde bunun  makinesi tarafından üretilmiş olması olasılığını hesaplayınız.

*Çözüm*: Bunun için,  olayı ile







olaylarını tanımlayalım. Buna göre, ,  ve  olayları örnek uzayın bir parçalanmasını oluşturur.

Verilen olasılıklar

, ,  , ,

, 

şeklinde yazıldığında  olayının olasılığı



olup aranan olasılık,



olarak bulunur.