2.3. Olasılık (Yoğunluk) Fonksiyonu

Olasılık ve istatistikte rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu yerine, genellikle dağılım fonksiyonundan elde edilen olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılır. Aslında, dağılım fonksiyonu verildiğinde olasılık fonksiyonu, olasılık fonksiyonu verildiğinde de dağılım fonksiyonu bulunabilir.

Kesikli bir  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu  olsun.  in değer kümesi  olmak üzere,  için Teorem (2.2.2) den  olayının olasılığının



şeklinde hesaplandığını biliyoruz (Teorem 2.2.22b). Buna göre,  için,



veya kısaca  olasılıkları hesaplanır.  için de  olduğu açıktır.

**Tanım 2.3.1** Değer kümesi  olan kesikli bir  rasgele değişkeninin *olasılık fonksiyonu*,



dir

Bir rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu, bütün reel sayılar kümesinde tanımlıdır. Fonksiyon değer kümesi dışında  olarak tanımlandığı için, rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu bazen  olarak da verilir. Ancak, bazı  için  olabilir. Herhangi bir rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu  aşağıdaki koşulları sağlar. Bu koşullar,

***i)*** 

***ii)*** 

dir.

**Örnek 2.3.1** a)  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun. Bu fonksiyonun bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için  sabitinin değerini bulalım. Her  için  olduğundan  ve  olması gerekir. Buradan,  sabitinin değeri



olarak bulunur. Yani,  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,



dir. Buna göre,  olasılığı da



olarak hesaplanmış olur.

b)  olmak üzere,  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,



olarak verildiğinde  sabitinin değerini bulalım. Yine, her  için  olması gerektiğinden  olmalıdır. Ayrıca,  fonksiyonunun Taylor serisi açılımından  sabitinin değeri



dir. Yani,  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,



şeklindedir

Kesikli rasgele değişkenlerde, dağılım fonksiyonu verildiğinde, olasılık fonksiyonu  eşitliği ile bulunur. Rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu verildiğinde dağılım fonksiyonu da,



şeklinde bulunur.

Bir önceki örnekte verilen olasılık fonksiyonunu ele alalım. Olasılık fonksiyonu,



olup dağılım fonksiyonunu bulmak için olasılık fonksiyonunu,

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

şeklinde yazalım. Buradan dağılım fonksiyonunun değerleri

,

,

,

,

,



olarak bulunur. Buna göre, dağılım fonksiyonu açık olarak,

 sayfa 52 deki sekil

şeklinde yazılır.

 sürekli ise dağılım fonksiyonu da süreklidir. O halde,  sürekli ise her  için  dir. Ayrıca  sürekli ise, rasgele değişkenin olasılık fonksiyonunu kesikli olasılık fonksiyonlardan ayırmak için “*olasılık yoğunluk fonksiyonu*” ifadesi kullanılır. Sürekli rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonları, sürekli olmasına rağmen dağılım fonksiyonunun türevlenemediği yerler olabilir.

**Tanım 2.3.2** Değer kümesi  olan sürekli bir  rasgele değişkeninin dağlım fonksiyonu  olsun.  in *olasılık yoğunluk fonksiyonu*,



dir

 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ,

***i)*** 

***ii)*** 

koşullarını sağlar. Diğer taraftan,  olasılığı (veya  olasılığı)



integrali ile hesaplanır.

**Örnek 2.3.2** ,  ve  için  olmak üzere,  bir olasılık uzayıdır.



olarak verilen  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu (Örnek, 2.2.3a) sürekli olmasına rağmen,  ve  noktalarında türevlenemez. Dolayısı ile,  rasgele değişkeninin değer kümesi  olup, olasılık yoğunluk fonksiyonu



olup grafiği Şekil (2.3.1) de verilmiştir.

2

*Şekil 2.3.1 Örnek (2.3.2) de verilen rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu*

Bu fonksiyon, her  için  ve



özelliklerini sağladığı için bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.  olasılığı ise,





olarak hesaplanmıştır. Sürekli rasgele değişkenlerde, aralık sınırları yazılırken uç noktaların önemi yoktur. Yani,  ile  olasılıkları aynıdır

 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  verildiğinde, dağılım fonksiyonu,



integrali ile hesaplanır. Bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu verildiğinde, bu özelliği sağlayan bir  fonksiyonu varsa, bu fonksiyon rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Böyle bir fonksiyon bulunamayabilir veya bulunduğu zaman da fonksiyonu belirlemek kolay olmayabilir. Oysa, bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu her zaman vardır. Bu nedenle, rasgele değişkenlerin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonları dağılım fonksiyonlarından elde edilmeye çalışıldı. Bir rasgele değişkenin aksi söylenmedikçe olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonunun var olduğu kabul edilecektir.

Kesikli dağılımlarda uç noktalar önemlidir. Örneğin, Örnek (2.3.1b) de verilen rasgele değişken için  ve  olasılıkları farklıdır. Olasılık fonksiyonu,  için olup olasılıklar,



ve



olup,  dir.

Genel olarak, olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde olasılıklar



ile hesaplanır.

2.4. Çok Değişkenli Dağılım Fonksiyonları

Bu kısımda rasgele vektörler (veya vektör rasgele değişkenler) ve dağılım fonksiyonları ile ortak olasılık (veya ortak olasılık yoğunluk) fonksiyonları üzerinde durulacaktır. Bileşenleri  olan boyutlu bir rasgele değişken  şeklinde gösterilecektir. Böyle bir rasgele değişken (veya rasgele vektör)



şeklinde tanımlanır. boyutlu rasgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu,



şeklinde tanımlanır. Karmaşıklığı önlemek için  alalım. O zaman, bileşenleri  ve  olan iki boyutlu vektör rasgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu,



şeklinde olur. Çok değişkenli dağılım fonksiyonları tek değişkenli dağılım fonksiyonlarında olduğu gibi benzer özelliklere sahiptir. Bunlardan bazıları aşağıdaki teoremde özetlenmiştir.

**Teorem 2.4.1**  bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri  ve  olan  iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu  aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. 
2. 
3. .

*İspat*: **i**) için olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için,  ve  kümelerini tanımlayalım. Buradaki  dizisi artan olup  dır. Dolayısı ile,



dir.  ve  alınarak  elde edilir.

**ii**)  için  olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için de  ve  kümelerini tanımlayalım.  azalan olup  dir. Ayrıca,  azalan olduğundan limit ile olasılık yer değiştirebilir. Buradan



elde edilir. Yine benzer şekilde,  ve  alınarak ,  ve  küme dizileri kullanılarak da elde edilir.

**iii**)  ve  küme dizilerini tanımlayalım. Her iki küme dizisi de artan olup,  ve  dir. Buradan da,



elde edilir

Bileşenleri  ve  olan iki boyutlu vektör rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu  verildiğinde,  ve  nin marjinal dağılım fonksiyonları sırası ile,

 ve 

şeklinde bulunur. Buradaki  ve  fonksiyonları,  ve  nin marjinal dağılım fonksiyonlarıdır. Buradan da, her bir rasgele değişkenin marjinal olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir.

Tek değişkenli dağılım fonksiyonu azalmayan ve sağdan süreklidir. Vektörlerde sıralama bağıntısı olmadığından, çok değişkenli dağılım fonksiyonları azalmayandır veya artandır gibi ifadeler kullanılamaz. Ancak, çok değişkenli dağılım fonksiyonu her bir değişkenine göre sağdan sürekli ve azalmayandır. İki değişkenli dağılım fonksiyonunun bu özellikleri aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

**Teorem 2.4.2**  bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri  ve  olan  iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu  değişkenlerine göre sağdan sürekli ve azalmayandır.

*İspat*: Önce, fonksiyonun bileşenlerine göre sağdan sürekli olduğunu gösterelim.  fonksiyonunun  bileşenine göre sağdan sürekliliği için,  veya  olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için de



olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Ayrıca ,



şeklinde yazılabilir.  ve  kümeleri için,  küme dizisi azalan olup  dir. Buna göre,



elde edilir. Bu da,  fonksiyonunun  değişkenine göre sağdan sürekli olduğunu gösterir. Benzer düşünce ile, fonksiyonun  değişkenine göre de sağdan sürekli olduğu gösterilir. Şimdi de, fonksiyonun her iki değişkenine göre de sağdan sürekli olduğunu görelim. Bunun için de,



olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Diğer taraftan,



şeklinde yazılabilir.  ve  için, her iki küme dizisi de azalan olup,  ve  dir. Buradan,



elde edilir. Bu da fonksiyonun her iki değişkenine göre sağdan sürekli olduğunu gösterir. Şimdi, fonksiyonun her iki bileşenine göre *ayrı ayrı azalmayan* olduğunu gösterelim.

Fonksiyonun  e göre azalmayan olduğunu göstermek için, her  ve  için  olduğunun gösterilmesi gerekir. Bunun için de,  ise



altküme bağıntısı yazılabilir. Buradan da,  ise,



elde edilir. Bu da fonksiyonun,  değişkenine göre azalmayan olduğunu gösterir. Benzer şekilde fonksiyonun  bileşenine göre de azalmayan olduğu gösterilir. Yani, her  ve  için  dir

**Teorem 2.4.3**  bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri  ve  olan  iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu  olsun. Bu durumda,



dir (Frechet sınırları).

*İspat:* ,  altkümelerini tanımlayalım. Buradan,

 den 

yazılır. Buna göre,



elde edilir.  değeri negatif olabileceği göz önüne alındığında,



ifadesi yazılabilir. Diğer taraftan,  ve  özelliklerinden,

 ve 

dir. Yani,  ve  olup,  dir. Bu iki eşitsizlik birleştirildiğinde,



şeklinde aranan eşitsizlik elde edilmiş olur

Tek değişkenli dağılım fonksiyonlarında,  dır. Burada da benzer özellik geçerlidir.

**Teorem 2.4.4**.  bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri  ve  olan  iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu  olsun.  için  dir.

*İspat*:  olmak üzere,  ise  kümesi



şeklinde iki ayrık kümenin birleşimi olarak yazılabilir. Buradan da,



eşitliğinden  bulunur. Bu da ispat için yeterlidir

 bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri  ve  olan  iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu  olsun. Bu durumda,



eşitliği için ,  kümelerini tanımlayalım. ,  ve  olduğundan,



eşitliği elde edilir. Yani,  dir.

Rasgele değişkenler kesikli ve sürekli olmak üzere iki gruba ayrılmıştı. Burada, her iki rasgele değişken kesikli veya sürekli olabildiği gibi biri kesikli diğeri sürekli de olabilir.

Her iki rasgele değişken de kesikli ise rasgele vektörün ortak olasılık fonksiyonu için bütün  ve  için  olasılıkları hesaplanır. Yani, kesikli  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,



şeklindedir.

Rasgele değişkenlerin her ikisi de sürekli ise, ortak dağılım fonksiyonu  olan  ve  rasgele değişkenlerinin *ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu* da,



olarak bulunur. Rasgele değişkenlerden biri kesikli diğeri sürekli ise tek değişkenlilerde olduğu gibi olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonları bulunur. Marjinal olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonları ise aşağıdaki gibi bulunur.

a)  ve  rasgele değişkenleri kesikli ve ortak olasılık fonksiyonu  ise, marjinal olasılık fonksiyonları





dir.

b)  ve  rasgele değişkenleri sürekli ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  ise marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları  ve  için

 ve 

integralleri ile hesaplanır.

c)  kesikli,  sürekli rasgele değişkenler ve ortak olasılık fonksiyonu  ise marjinal olasılık ve olasılık yoğunluk fonksiyonları  ve  için,

 ve 

şeklindedir. Ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde, ortak dağılım fonksiyonları da



şeklinde bulunur.

**Tanım 2.4.1**  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu , marjinal olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonları da sırası ile  ve  olsun. Bütün  ve  için



ise  ve  rasgele değişkenlerine *bağımsızdır* denir

**Tanım 2.4.2**  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu , marjinal olasılık ve olasılık yoğunluk fonksiyonları da sırası ile  ve  olsun.  verildiğinde  in *koşullu olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu*,



dir

**Örnek 2.4.1** a) Bir çift zarın aynı anda atılması deneyini ele alalım.  birinci zarın üzerindeki noktaların sayısını,  de ikinci zarın üzerindeki noktaların sayısını göstersin. Buna göre, örnek uzay ( ve  zarların üzerindeki nokta sayılarına göre şekilleri göstermek üzere),  olup sigma cebir de kuvvet kümesi  olsun.  için  denirse  bir olasılık uzayı olur.  ve  birer rasgele değişken olup Örnek (2.1.2) gereğince  ve  rasgele değişkendir.  ve  nin değer kümeleri  ve  olup, ortak olasılık fonksiyonu için olasılıklar ayrı ayrı hesaplanır. Aşağıda bu olasılıklardan birkaç tanesi hesaplanmış diğerleri de benzer şekilde hesaplanarak tablo halinde ortak olasılık fonksiyonu verilmiştir.

Önce,  olasılığını hesaplayalım. Burada,

 ve 

olup arakesit kümesi



dir. Buradan,  olasılığı,



olarak hesaplanır.

Benzer şekilde,  olasılığı için



ve



olup arakesit kümesi,



dir. Buradan,  olasılığının değeri



dır. Diğer olasılıklar benzer şekilde hesaplanarak aşağıda tablo halinde verilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 ve  nin ortak olasılık fonksiyonundan, marjinal olasılık fonksiyonları da



ve



formülleri kullanılarak

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

şeklinde bulunmuştur.

Koşullu olasılık fonksiyonları da koşullu olasılık fonksiyonunun tanımı kullanılarak hesaplanır. Örneğin,  verildiğinde  nin koşullu olasılık fonksiyonu  için  olasılıkları hesaplanarak bulunur. Bu koşullu olasılıklar













şeklinde hesaplanmış olup koşullu olasılık fonksiyonu,

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

olarak elde edilmiştir.

 olduğundan  ve  bağımsız değildir.

b) ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun (Casella ve Berger, 2002, sayfa 150).  ve  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,





integrallerinden

 ve 

şeklinde bulunmuştur. Buradan da



olduğundan  ve  bağımsız değildir. Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonları da yine kesikli rasgele değişkenlerde olduğu gibi bulunur.  verildiğinde  in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu



eşitliğinden,



şeklinde bulunmuştur.

c)  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun. Önce, fonksiyonun bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için  sabitinin değeri bulunmalıdır.  bir olasılık fonksiyonu olduğundan toplam olasılık  olmalıdır. Yani,



eşitliğinden  bulunur. Yani  ve  nin ortak olasılık fonksiyonu,



şeklindedir. Marjinal olasılık fonksiyonları için,



ve



integral ve toplamın sonuçlarından marjinal olasılık fonksiyonları sırası ile

 , 

olarak bulunmuştur.

d) Aynı marjinal olasılık (veya olasılık yoğunluk) fonksiyonlarını veren farklı ortak olasılık (veya olasılık yoğunluk) fonksiyonları bulunabilir. Örneğin,  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



ve  rasgele vektörünün ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da,



şeklinde verildiğinde her iki ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu için marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları aynıdır.  rasgele vektörünün ortak olasılık yoğunluk fonksiyonundan marjinallerin,

 ve 

şeklinde olduğu açıktır. Buradan, her  için,  olduğundan  ve  bağımsızdır. Şimdi,  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonundan

 ve 

olduğundan  ve  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları da,

 ve 

şeklinde olup, yukarıdaki marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları ile aynıdır. Ancak bu rasgele değişkenler  olduğundan bağımsız değildir

**Örnek 2.4.2**  ve  rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu olsun (Öztürk, 1993, sayfa 174).  olmak üzere, 

dir. Bunu göstermek için,

 

 

olaylarını tanımlayalım. Fonksiyonun tanım kümesi Şekil (2.4.1) de verilmiştir.

2

*Şekil 2.4.1 Örnek (2.4.2) de aranan olasılık (taralı alan)*

Şekildeki taralı alan  kümesini göstermektedir. Buna göre,

 ve  ve 

küme ilişkileri yazılabilir. Buradan,



olup  tanımı da kullanıldığında,

, 

 , 

eşitlikleri yazılır. Buradan da,  nin değeri



olarak bulunur. Bu ifadeler birleştirildiğinde aranan eşitlik,



şeklinde elde edilmiş olur

**Örnek 2.4.3** ,  ve  için  nın alanı olmak üzere,  bir olasılık uzayıdır.  olmak üzere,



şeklinde tanımlanan  rasgele vektörünün dağılım fonksiyonunu bulalım.  nin değer kümesi şekilde de görüldüğü gibi  dir.

2

*Şekil 2.4.2 İki boyutlu rasgele değişkenin tanım ve değer kümesi (, )*

Şimdi,  nin dağılım fonksiyonunu bulalım. Dağılım fonksiyonu,



şeklindedir.  için fonksiyonun değeri,

|  |
| --- |
| KUCUK SEKİL 1 |

dir.  olmak üzere  için



olmak üzere  için fonksiyonu değeri,



olarak elde edilmiştir. Şimdi  kümesini tanımlayalım.  için fonksiyonun değeri yandaki taralı bölgenin alanının dörtle biridir. Yani,

KUCUK SEKİL 2

|  |
| --- |
| dir. |

Son olarak  olmak üzere  için  de şekilde gösterilen dikdörtgenin alanının dörtte biridir. Yani,

|  |
| --- |
| KUCUK SEKİL 3 |

dir. Buna göre,  rasgele vektörünün dağılım fonksiyonu



2

*Şekil 2.4.3 Örnek (2.4.3) de verilen iki değişkenli dağılım fonksiyonu*

şeklinde olup ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklinde elde edilir

2.5. Beklenen Değer

Bu kısımda, kitlenin önemli özelliklerinden rasgele değişkenlerin momentleri üzerinde durulacaktır.  bir rasgele değişken  de tanım kümesi reel sayılar olan herhangi bir fonksiyon olmak üzere  de bir rasgele değişkendir.  in olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde  in de olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu da bulunabilir. Rasgele değişkenlerin dönüşümlerinin dağılımlarının bulunması bir sonraki bölümde incelenecektir. Bu kısımda,  in olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde rasgele değişkenin momentleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca, momentler ile ilgili bazı kavramlar da kısaca ele alınacaktır.

**Tanım 2.5.1** Değer kümesi  olan  rasgele değişkenin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olsun.  rasgele değişkeninin *beklenen değeri*

 ise 

dir

Rasgele değişkenin beklenen değeri her zaman olmayabilir. Yani,  veya  değerleri sonlu olsa bile,  (veya  ) integrali (veya toplamı) sonlu olmayabilir. Böyle durumlarda rasgele değişkenin beklenen değeri yoktur diyeceğiz. Şimdi, bunu bir örnek üzerinde görelim.

**Örnek 2.5.1**  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun (Öztürk, 1993, sayfa 241).  alındığında



olmasına rağmen,



olduğundan  rasgele değişkeninin beklenen değeri yoktur

 herhangi bir rasgele değişken ve  olsun. Eğer her  için  ise  rasgele değişkeni  noktasına göre *simetriktir* denir. Herhangi bir  rasgele değişkeni  noktasına göre simetrik ise,  dir (Biswal, sayfa 64).

**Tanım 2.5.2**  rasgele değişkeninin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  ve her  için  var olsun.  değerine  rasgele değişkeninin *momenti*  denir ve  ile gösterilir. Ayrıca,

a)  için  değerine  in *beklenen değeri* denir ve ile gösterilir.

b)  değerine  in  ye göre  *merkezi momenti* denir ve  ile gösterilir.

c)  değerine  in *varyansı* denir ve  veya  ile gösterilir.

d)  değerine  in  *çarpımsal momenti* denir

 olup  rasgele değişkeninin varyansının pozitif kareköküne  in *standart sapması* denir.  in varyansı  ise standart sapması  dır.

**Örnek 2.5.2**  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu  için,



şeklinde verilmiş olsun. Bu rasgele değişkenin beklenen değeri



dir. Yani,  dir. İkinci moment ise ( denirse),







şeklinde bulunmuştur. Rasgele değişkenin bu iki momentinden  in varyansı da



olarak bulunmuştur

**Tanım 2.5.3**  rasgele değişkeninin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  ve  var olsun.

a)  ve  için  fonksiyonuna,  in *moment çıkaran fonksiyonu* denir ve  ile gösterilir.

b)  olmak üzere,  ve  için  fonksiyonuna,  in *karekteristik fonksiyonu* denir ve  ile gösterilir.

c)  ve  için  fonksiyonuna,  in *çarpımsal moment üreten fonksiyonu* denir ve ile gösterilir

Bu fonksiyonlar kullanılarak da rasgele değişkenlerin momentleri hesaplanabilir. Örneğin,  in moment çıkaran fonksiyonu  varsa, X in momentleri



şekilde moment çıkaran fonksiyonunun türevinden hesaplanır. Türev ile beklenen değer operatörlerinin yer değiştirebildiği varsayımı altında, moment çıkaran fonksiyonunun  türevi,



olup, türevde  yazıldığında rasgele değişkenin  momentinin



olduğu görülür.

**Örnek 2.5.3** a)  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu  için



olarak verilmiş olsun. Bu rasgele değişkenin ilk iki momenti Örnek (2.5.2) de  ve  olarak hesaplanmıştı. Bu rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu ( fonksiyonunun Taylor serisi açılımı kullanılarak),



olup rasgele değişkenin birinci momenti,



ve ikinci momenti,



şeklinde hesaplanabilir. Bu moment çıkaran fonksiyonu kullanılarak, rasgele değişkenin diğer tüm momentleri,  ler için



şeklinde ardışık olarak bulunabilir. Şimdi, bu bağıntının doğru olduğunu görelim. Bunun için matematiksel tümevarım yöntemi kullanılabilir. Önce,  için eşitliğin sol tarafı  dir. Eşitliğin sağ tarafı ise,



olup bağıntı  için geçerlidir. Matematiksel tümevarım gereği, eşitliğin  için doğru olduğunu varsayarak  için doğru olduğunu gösterelim. Eşitlik  için doğru ise, moment çıkaran fonksiyonunun türevinde  yazılarak momentlerin elde edildiğini de göz önüne alarak



yazalım. Buradan,  için eşitliğin sol tarafı





şeklinde yazılır. Burada  yazıldığında eşitlik  için,



olup iddia  için de doğrudur. Yani, iddia her  için doğrudur.

b) Negatif değerler almayan kesikli bir  rasgele değişkeninin beklenen değeri varsa, bu beklenen değerin



şeklinde hesaplanabileceğini görelim. Sağ taraftaki serinin açık olarak yazılması ile





şeklinde aranan eşitlik elde edilir.

Negatif olmayan değerler alan sürekli bir  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu  olsun.  rasgele değişkenin beklenen değeri varsa,



dir (Öztürk, 1993)

Bir rasgele değişkenin varyansı, ortalamadan (beklenen değer) sapmasının karesinin beklenen değeridir. Tanım (2.5.2) de bir rasgele değişkenin varyansı  olarak tanımlandı.Bu varyans genellikle  hesaplanır. Yani,



dir.  olmak üzere  fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan kesikli  rasgele değişkeninin beklenen değeri (sürekli durumda toplam sembolleri yerine integraller gelir),



ve



dir. Yani bir rasgele değişkenin lineer birleşiminin beklenen değer ve varyansı  olmak üzere,  ve  dir.

Buraya kadar bir boyutlu rasgele değişkenlerin beklenen değeri incelendi. Şimdi, bileşenleri  ve  olan iki boyutlu rasgele vektörün ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olsun. Marjinal olasılık fonksiyonlarından  ve  değerleri hesaplanabilir. Ayrıca,  ve  aynı örnek uzay üzerinde tanımlı rasgele değişkenler,  de  den  ye tanımlı bir fonksiyon olmak üzere  tek boyutlu bir rasgele değişkendir. Buna göre  beklenen değeri varsa, bu beklenen değer



şeklinde hesaplanır.

**Tanım 2.5.4** Bileşenleri  ve  olan iki boyutlu bir rasgele vektörün ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olsun.

a)  ile  arasındaki *kovaryans* ,

b)  ile  arasındaki *korelasyon* ise,

,

c) Bileşenleri  ve  olan iki boyutlu bir rasgele vektör  olmak üzere,  rasgele vektörün beklenen değer vektörü ile varyans kovaryans matrisi sırası ile,

 , 

dir

 ile  arasındaki kovaryans genellikle  şeklinde hesaplanır.

**Örnek 2.5.4** a) Bileşenleri  ve  olan iki boyutlu bir rasgele vektörün ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



olsun.  ve  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

 ve 

dir (Örnek (2.4.1b)). Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından , , ,  elde edilir. Ayrıca,



olup  ile  arasındaki korelasyon



olarak hesaplanmıştır.

b)  ile  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun (Casella ve Berger, 2002, sayfa 170).  ve  olmak üzere marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

 ve 

dir. Burada,  rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,



ve  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu da,

 için  ve  için 

olarak hesaplanmıştır. Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından,  ve  nin beklenen değer ve varyansı

, ,  ve 

dır. Diğer taraftan,



olup,  ile  arasındaki korelasyon



dir.

c)  bir olasılık uzayı olsun.  için  ve  olmak üzere,  ve  rasgele değişkenleri

 

şeklinde tanımlansın. Her iki rasgele değişkenin değer kümesi aynıdır (). Buna göre,  in olasılık fonksiyonu,

 ve 

den,



şeklinde yazılabilir.  nin olasılık fonksiyonu için



olduğundan  olayının olasılığı,



şeklinde olup,  nin olasılık fonksiyonu da aynıdır. Yani,

 ve 

olasılıklarının hesabından, Y nin olasılık fonksiyonu



şeklinde bulunur. Yani,  ve  nin olasılık fonksiyonları aynıdır. Ayrıca,









olasılıklarından ortak olasılık fonksiyonu da,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

şeklinde bulunmuştur. Buradan,



olup  ile  arasındaki korelasyon



dir.  ve  aynı olasılık fonksiyonlarına sahiptir ancak bağımsız değildir

**Tanım 2.5.5** Herhangi bir  rasgele değişkeninin beklenen değeri  varyansı , dağılım fonksiyonu da  olsun. Buna göre,

*a) (Medyan)*  in medyanı

  **ve** 

özelliğini sağlayan  sayısı,

b)*Varyasyon katsayısı* (Coefficient of Variation): ,

c)*Çarpıklık (skewness) katsayısı :* ,

d)*Basıklık (kürtosis) katsayısı* : 

dür

**Örnek 2.5.5**  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu  için



olarak verilsin. Moment çıkaran fonksiyonu yardımı ile ilk üç moment ve merkezi momentler,

,  , , 

,  ve 

olarak hesaplanmıştır. Buradan da çarpıklık ve basıklık katsayıları sırası ile,





dır

Çok değişkenli dağılım fonksiyonlarından (Kısım (2.4)) koşullu olasılık fonksiyonları ve buradan da koşullu beklenen değer bulunabilir. Örneğin,  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olsun.  verildiğinde  rasgele değişkeninin koşullu olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olup  verildiğinde  nin koşullu beklenen değeri



dir ( kesikli ise formülde integral yerine toplam sembolü gelir). Bu koşullu beklenen değer  nin bir fonksiyonudur. Yani,



dir. Bir değişkenin diğer değişkenler üzerine regresyonu (burada  nin  ler üzerine regresyonu) bu koşullu beklenen değerdir. Regresyon konusu kitabın son bölümünde ayrıntılı olarak incelenecektir. Buradaki  fonksiyonu  lerin lineer birleşimi ise regresyon, linner regresyon denklemi, değilse lineer olmayan regresyon denklemi adını alır. Koşullu beklenen değer  ve  şeklinde ise regresyona basit doğrusal regresyon denir.

**Teorem 2.5.1**  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olmak üzere,

 ve 

dir.

*İspat:* İspatı sürekli durum için yapalım (kesikli durumda integraller yerine toplamlar gelir).  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  ise,  verildiğinde  in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu  olsun. Buradan koşullu beklenen değer,



şeklinde bulunur. Varyansın tanımından,  in varyansı



olarak yazılabilir. Bu ifadedeki son terim sıfırdır. Bunu görebilmek için,



eşitliğini yazalım. Koşullu dağılımdaki  ve  rasgele değişkenler olup  ve  sabittir. Dolayısı ile,



elde edilir. Buradan,  olup



ve



olduğundan,



şeklinde aranan eşitlik elde edilir

**Teorem 2.5.2**  ve  herhangi iki rasgele değişken,  de tanım kümesi reel sayılar olan herhangi bir fonksiyon olmak üzere,



dir.

*İspat:* Kolayca görüleceği gibi,



olup son terim sıfırdır. Dolayısı ile,



olup  olduğunda eşitlik sağlanır

**Örnek 2.5.6** a)  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olsun.  verildiğinde,  nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklinde olup  nin koşullu beklenen değeri,



dir.

b)  ve  nin ortak olasılık fonksiyonu ,  ve  için,



olarak verilmiş olsun. Burada,



dir.  rasgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonu  için,



olup  verildiğinde  nin koşullu olasılık fonksiyonu da



olarak bulunur. Buradan,  verildiğinde  nin koşullu beklenen değeri





olur. Burada,  dir.

c)  ve  kesikli iki rasgele değişken ve ortak olasılık fonksiyonları  olsun.  ise  ve  değerlerini bulmak isteyelim.  ve  kesikli rasgele değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonları  ve  olmak üzere,  verildiğinde  nin koşullu beklenen değeri



dir. Başka bir ifade ile,



dir. Diğer taraftan,



dir. Benzer şekilde  ile  arasındaki korelasyon  olmak üzere,



eşitliği yazılabilir. Bu iki eşitlik,  ve



şeklinde yazıldığında iki bilinmeyenli iki denklemin çözümünden,

 ve 

bulunur

**Teorem 2.5.3**  ve  herhangi iki rasgele değişken ve  olsun. Buna göre,

a) 

b) 

dir.

*İspat:*Kesikli durumu göz önüne alalım (sürekli durumda toplam yerine integral gelir).

1. Beklenen değerin tanımından aranan eşitlik



şeklinde gösterilmiş olur. Bu da Teoremin (a) kısmını tamamlar.

b) Varyansın tanımında  in yukarıdaki değeri yerine konursa,



şeklinde aranan sonuç elde edilir