2.6. Üretici Fonksiyonlar

Bu kısımda, rasgele değişkenlerin beklenen değerine bağlı bazı üretici fonksiyonlar ve bunların kullanıldığı yerler üzerinde durulacaktır. Bunlardan, moment çıkaran fonksiyonu ile karekteristik fonksiyon bir önceki kısımda tanımlanmıştı.

*1. Moment Çıkaran Fonksiyonu:*

Bu fonksiyonun tanımı bir önceki kısımda (Tanım(2.5.3a)) verildi.  in moment çıkaran fonksiyonu,  için  dir. Moment çıkaran fonksiyonu yardımı ile var olması halinde herhangi bir rasgele değişkenin bütün momentlerinin hesaplanabileceğini biliyoruz. Ayrıca, rasgele değişkenin bütün momentleri biliniyorsa, rasgele değişkenin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonuna ihtiyaç duyulmadan moment çıkaran fonksiyonu da bulunabilir.  olduğundan beklenen değer ile sonsuz toplamın yer değiştirebildiği varsayımı altında,  fonksiyonunun Taylor serisi açılımından moment çıkaran fonksiyonu,



şeklinde de ifade edilebilir. Yani, rasgele değişkenin bütün momentleri ile moment çıkaran fonksiyonu arasında bir ilişki de vardır. Ancak, buradaki geçişin yapılabilmesi için sonsuz toplam ile beklenen değer operatörünün yer değiştirebilir olması gerekir. Benzer durum, moment çıkaran fonksiyonundan momentlere geçiş için de vardır. Orada da beklenen değer operatörü ile türev operatörlerinin yer değiştirebilmesi varsayımı yapılır. Bu yer değiştirebilme varsayımları momentlerin var olmasından dolayı genellikle sağlanır.

**Örnek 2.6.1** a)  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun.  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,  için



dir. Rasgele değişkenin momentlerinin



şeklinde hesaplanabildiğini bir önceki kısımdan biliyoruz. Moment çıkaran fonksiyonunu kullanarak, bu rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansını bulalım. Birinci moment, yani rasgele değişkenin beklenen değeri,



olup ikinci momenti de



dir. Dolayısı ile, rasgele değişkenin varyansı  dir.

b) Herhangi bir  rasgele değişkeninin bütün  için  olarak verilsin. Bu rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu için yukarıdaki formülde  yazıldığında moment çıkaran fonksiyonu,  olmak üzere,



olur. Aslında, bir  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu



şeklinde verilmiş ise, bu rasgele değişkenin  nci momenti



ve moment çıkaran fonksiyonu da  olmak üzere



dir

*2. Kümülant Üreten Fonksiyonu*

**Tanım 2.6.1**  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu var ve  olsun. Buna göre,  in *kümülant üreten fonksiyonu*,



dir

 rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu (dolayısı ile, kümülant üreten fonksiyonu) bilindiğinde  in  kümülantı



formülü ile bulunur.

**Örnek 2.6.2**  rasgele değişkeninin kümülant üreten fonksiyonu



olup birinci kümülant değeri



dir. İkinci kümülant değeri de,



dir. Türevler ardışık olarak devam ettirildiğinde üçüncü ve dördüncü kümülantların,





şeklinde olduğu görülür.  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu  için



şeklinde verildiğinde,  in moment çıkaran fonksiyonu  olup kümülant üreten fonksiyonu,



dir. Buradan kümülantlar bütün  ler için,



dir. Yani, bu rasgele değişkenin bütün kümülantları aynıdır

*3. Çarpımsal Moment Üreten Fonksiyonu*

Bu fonksiyonun tanımı da bir önceki kısımda (Tanım (2.5.3c)) verildi.  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,  olmak üzere,  in çarpımsal moment üreten fonksiyonu  için  dir. Rasgele değişkenin çarpımsal üreten fonksiyonu verildiğinde çarpımsal momentler,



şeklinde hesaplanır.

**Örnek 2.6.3**  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu  için



olarak verilmiş olsun. Bu rasgele değişkenin çarpımsal moment üreten fonksiyonu,



olup çarpımsal momentler,







şeklindedir

*4. Karekteristik Fonksiyon*

Karekteristik fonksiyonun tanımı da daha önce (Tanım (2.5.3b)) verildi. Karekteristik fonksiyon, üretici fonksiyonlar içinde önemli bir yer tutar. Bir rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu bazen olmayabilir. Ancak, karekteristik fonksiyonu her zaman vardır. Ayrıca, karekteristik fonksiyon biliniyorsa, olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunabilir.  olmak üzere,  rasgele değişkeninin karekteristik fonksiyonu  dir. Daha açık olarak,  in karekteristik fonksiyonu



dir.  rasgele değişkeninin karekteristik fonksiyonu  ise momentler (var olması halinde),



formülü ile hesaplanır.

**Örnek 2.6.4**  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  için



şeklinde verilmiş olsun.  in karekteristik fonksiyonu,



olup ilk iki moment,





dir. Rasgele değişkenin varyansı da  dir

**Örnek 2.6.5**  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu



olarak verilmiş olsun. Bu rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu tanımlı değildir. Oysa,  in karekteristik fonksiyonu Euler formülü olarak bilinen  eşitliği kullanılarak bulunabilir.  in karekteristik fonksiyonunu,



şeklinde yazılalım ve  ve  değerlerini hesaplayalım. Önce,



olduğundan  fonksiyonu tektir. Tek bir fonksiyonun simetrik bir bölge üzerinden integrali de sıfırdır. Yani,



dır. Benzer şekilde,



olduğundan  fonksiyonu çifttir. Buna göre, karekteristik fonksiyon,



olarak bulunur (Billingsley, 1986)

Karekteristik fonksiyonunun olasılık teorisinde önemli olduğunu belirtmiştik. Şimdi, bu fonksiyonun özelliklerinden bazılarını kısaca hatırlayalım.

a) herhangi bir  rasgele değişkeni, örnek uzaydan reel sayılara giden reel değerli bir fonksiyondur. Reel değerli bir  rasgele değişkeninin karekteristik fonksiyonu,  gibi kompleks değerli bir rasgele değişkenin beklenen değeridir. Ayrıca,

 ve 

dir.

b)  olduğu açıktır.

c) 

olup her  için  dır.

d)  kompleks bir sayı olsun ( yani  için  ve  nin kompleks konjugesi  dir). Herhangi bir  rasgele değişkeninin karekteristik fonksiyonu  olmak üzere,



dir. Yani,  karekteristik fonksiyonu *Hermitian özelliğine* sahiptir.

e)  rasgele değişkeninin karekteristik fonksiyonu ise  olmak üzere  nin karekteristik fonksiyonu da



şeklindedir.

f) Bir rasgele değişkenin karekteristik fonksiyonu biliniyorsa, dağılım fonksiyonu da bulunabilir. Aşağıdaki teorem bunu ifade etmektedir.

**Teorem 2.6.1** Herhangi bir  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu , karekteristik fonksiyonu da  olsun.  pozitif bir sayı olmak üzere  nin sürekli olduğu yerlerde,



ve



dir (Billingsley, 1986, sayfa 357)

**Örnek 2.6.6** a) Karekteristik fonksiyonu,  olan  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Bunun için,  eşitliğinden  in olasılık yoğunluk fonksiyonu (Teorem (2.6.1))





şeklinde bulunur. Yani,  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  için,



dir.

b)  rasgele değişkeninin karekteristik fonksiyonu  ve  için,



olarak verildiğinde yine Teorem (2.6.1) den olasılık yoğunluk fonksiyonu için





ifadesi elde edilir. Bu son ifade,



dönüşümü ile,



haline gelir. Yani,  in olasılık yoğunluk fonksiyonu,  için



dir.

2.7. Çözümlü Problemler

**2.7.1**   bir rasgele değişken ise, aşağıdaki önermelerin denk olduğunu gösteriniz.

a)  için  b)  için 

c)  için  d)  için 

*Çözüm:*  bir sigma cebir olduğundan her  için  dur. Buradan, (a) ile (b) önermeleri ve (c) ile (d) önermeleri denktir. Buna göre, (b) ile (c) önermeleri denk ise bütün önermeler denk olur. Önce,  için  olsun. O zaman her  için  küme dizisini tanımlayalım.  bir sigma cebir olduğundan  kümelerinin sayılabilir arakesitleri de  dadır. O halde,



olur. Yani,  önermesi doğrudur. Şimdi,  için  olsun. Buradan her  için,  yazıldığında,  bir sigma cebir olduğundan  lerin sayılabilir birleşimleri de  nun elemanıdır. Buradan,



elde edilir. Buna göre,  önermesi sağlanmış olur. Dolayısı ile,  ve  olduğundan iki önerme denktir.

**2.7.2 ,**  ve  için  olmak üzere,  bir olsılık uzayıdır.



şeklinde tanımlanan  rasgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

*Çözüm*:  in değer kümesinin  olduğu fonksiyonun aşağıda (Şekil (2.7.1)) verilen grafiğinden görülmektedir.  in değer kümesi  nin bir alt kümesi olup en küçük ve en büyük alabileceği değerlerini bulabilmek için fonksiyonun türevinden yararlanabiliriz (,  nın türevlenebilen bir fonksiyonudur). Yani,



olduğundan  rasgele değişkeni en küçük değerini  noktasında alır. Bu noktadaki değeri ise  dir. Rasgele değişkenin değer bölgesini gösteren grafik Şekil (2.7.1) de verilmiştir. Yani  rasgele değişkeninin değer kümesi  dır.

2

*Şekil 2.7.1 Problem (2.7.2) de tanımlanan rasgele değişkenin değer bölgesi*

Şimdi,  in dağılım fonksiyonunu bulalım. Önce,  ise  ve  için  olduğu açıktır.  için dağılım fonksiyonunun değeri





 için fonksiyonun değeri de,





olarak hesaplanmıştır. Buna göre,  in dağılım fonksiyonu ile olasılık yoğunluk fonksiyonu (dağılım fonksiyonu   ve  noktalarında türevlenemez) sırası ile,

 , 

şeklindedir. Ayrıca,



olduğundan bu fonksiyon bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Rasgele değişkenin beklenen değeri de



olarak hesaplanmıştır.

**2.7.3**  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



olarak verilmiş olsun.

a)  sabitinin değerini bulunuz.

b)  ve  olasılıklarını hesaplayınız.

*Çözüm*: a)  olduğu,



çift katlı integralinin sonucundan açıktır.

b)  olasılığına karşılık gelen bölge Şekil (2.7.2) de gösterilmiştir. Bu bölgenin alanı (aranan olasılık),



dir.

2

*Şekil 2.7.2 Problem (2.7.3) de aranan olasılığa ait bölge*

Diğer olasılık için,  in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonuna ihtiyacımız vardır.



integralinin sonucundan  rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklinde bulunmuştur. Dolayısı ile aranan olasılık,



dır.

**2.7.4** a) ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



olarak verilmiş olsun.

a)  sabitinin değerini,  olasılığını ve  ile  arasındaki korelasyonu hesaplayınız.

b)  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



olarak verildiğinde  olasılığını hesaplayınız.

*Çözüm:* a) Önce,



olduğundan,  dür. Yani,  ve  in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



dir. Ayrıca,





integrallerinden  ve  rasgele değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

 

olarak yazılır. Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından beklenen değer ve varyanslar,

, ,  ve , , 

olarak hesaplanmıştır. Marjinaller hesaplandıktan sonra, aranan olasılık





olarak elde edilir. Ayrıca,



olup  ve  rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon da



olarak bulunmuştur.

b) ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



şeklinde verildiğinde marjinaller

 

şeklinde olur. Ayrıca, her  için  olup  ve  bağımsız rasgele değişkenlerdir. Buna göre  olasılığı,





olarak bulunmuştur.

**2.7.5**  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verildiğinde, bu rasgele değişkenin momentleri arasında,



şeklinde bir bağıntının olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*: Türev ile integral operatörlerinin yer değiştirebildiği varsayımı altında, çarpım şeklindeki iki fonksiyonun türevi kullanılarak eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim



 

şeklinde yazılabilir. Buradan da



şeklinde aranan eşitlik elde edilmiş olur.

**2.7.6**  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun.

a)  sabitinin değerini bulunuz.

b)  olasılığını hesaplayınız.

c)  ve  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

d)  koşullu olasılığını hesaplayınız.

e)  ile  arasındaki korelasyonu hesaplayınız.

f)  verildiğinde,  nin koşullu beklenen değerini hesaplayınız.

*Çözüm:* a)  olduğundan,  in sınırları  dir. Yani,  dir. Buradan  sabitinin değeri,



eşitliğinden  olarak bulunmuş olur.

b)  olasılığı için



kümesini göz önüne alalım. Buradan aranan olasılık,

olarak hesaplanır.

c)  ve  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulalım. Önce,



olup  in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,



dir.  olduğundan



integralinden sonucu olarak,  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu da,



olarak bulunur.

d)  olasılığı için  verildiğinde  nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonuna ihtiyaç vardır.  için



olduğundan  verildiğinde  nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,



dir. Diğer taraftan,



olduğundan  bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Buradan aranan olasılık da,



olarak hesaplanmıştır.

e) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından beklenen değer ve varyanslar

, ,  ,  ,  , 

şeklinde bulunmuştur. Ayrıca,



dır. Dolayısı ile,  ile  arasındaki kolerasyon



dır.  ve  rasgele değişkenleri bağımsız olmamasına rağmen, aralarındaki korelasyon sıfırdır.

f)  verildiğinde,  nin koşullu beklenen değeri,



dir.

**2.7.7**  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun.  sabitinin değerini bulunuz.  ile  bağımsız mıdır?

*Çözüm*: Önce,



olduğundan  dur. Marjinal olasılık fonksiyonları da

 , 

şeklindedir. Buradan,  verildiğinde  in koşullu olasılık fonksiyonu,  için



olup  ve  rasgele değişkenleri bağımsızdır.

**2.7.8**  bir olasılık uzayı ve  olsun.  ve  rasgele değişkenleri

 

olarak tanımlansın. Buna göre,



önermesini ispat ediniz.

*Çözüm*:  olduğundan, ,  olup,



dir. Buradan,



yazılır. Dolayısı ile,

elde edilir.

**2.7.9**  Dağılım fonksiyonu,



şeklinde verilen bir  rasgele değişkenin modunu bulunuz.

*Çözüm*: Bir rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu dağılım fonksiyonunun türevi olduğundan  in olasılık yoğunluk fonksiyonu,



dir. Bir rasgele değişkenin modu ise olasılık fonksiyonunu maksimum yapan değerdir. Buradan,  in modu olasılık yoğunluk fonksiyonunun türevini sıfır yapan noktadır. O halde,  olduğundan rasgele değişkenin modu  dir.

**2.7.10**  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun.

a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

b) ,  ve 

olasılıklarını hesaplayınız.

*Çözüm*: a) Önce,

 ve 

integral değerleri kullanılarak marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile

 ve 

şeklinde bulunmuştur.

b)Şimdi olasılıkları hesaplayalım. Önce,  olasılığı,



dir. Burada, L’Hospital kuralı iki defa uygulandığında (limit ifadesinde  veya  ifadeleri geldiği zaman uygulanır),



olduğunu belirtmek gerekir.  olasılığı ise,





dür. Son olarak,  olasılığını hesaplayalım. Bunun için,

,



ve



olduğundan aranan olasılık,



şeklinde bulunmuştur. Burada integrallerin analitik hesabı için Mapple VIII programından yararlanılmıştır.