3.2. Çok Değişkenli Dönüşümler

Bu kısımda,  ve  ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan herhangi iki rasgele değişken olmak üzere,  gibi bir rasgele değişkenin olasılık fonksiyonunun elde edilmesi üzerinde durulacaktır. Burada,  fonksiyonu,  den  ye giden bir fonksiyondur. İşlemlerin kolay yürütülebilmesi için, ağırlıklı olarak iki değişkenli dönüşümler ele alınacaktır. Burada  fonksiyonu sürekli olabildiği gibi,  ve  nin sürekli olmayan bir fonksiyonu da olabilir. Ayrıca,  ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan rasgele değişkenler olmak üzere,  şeklindeki bir rasgele değişkenin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonuna da ihtiyaç duyulabilir. Diğer taraftan,  ve  nin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde,  ve  şeklinde tanımlanan  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu da bulunabilir.



*Şekil 3.2.1 İki boyutlu dönüşüm*

 rasgele değişkeninin dağılımı değişik yollardan elde edilebilir.  tek değişkenli bir rasgele değişken olduğundan bazen doğrudan dağılım fonksiyonu bulunabilir. Dağılım fonksiyonundan da olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur. Bazen, başka tekniklerin denenmesi gerekebilir. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde açıklamaya çalışalım.

**Örnek 3.2.1** Bağımsız aynı  olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip iki rasgele değişken  ve  olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonları



şeklinde verildiğinde,  ve  rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulalım. Burada olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulmak için dağılım fonksiyonu tekniği kullanılabilir.  ise,  ve  için,



olup  nun dağılım fonksiyonu

 

şeklindedir. Dağılım fonksiyonunun türevinden  nun olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak bulunur.  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu da benzer şekilde bulunur. Yani,  nin dağılım fonksiyonu,  ise  ve  için de



olup  nin dağılım fonksiyonu da



şeklindedir. Yine dağılım fonksiyonunun türevinden  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu da



olarak elde edilir

Kesikli rasgele değişkenlerde, dağılım fonksiyonuna ihtiyaç duyulmadan olasılık fonksiyonu bulunabilir.

**Örnek 3.2.2** Bağımsız  ve  rasgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonu  için



olarak verilsin.  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulalım.  nun değer kümesi ile  ve  nin değer kümeleri aynı olup olasılık fonksiyonu  için,



şeklinde doğrudan hesaplanabilir.  nun olasılık fonksiyonu,  (veya  nin) nin olasılık fonksiyonuna benzemektedir.  ve  nin olasılık fonksiyonlarında  yerine  gelmiştir. Yani,  nun olasılık fonksiyonu



dir

**Örnek 3.2.3** a) Birim uzunluğundaki düzgün bir çubuk üzerinde rasgele iki nokta işaretlensin. Bu iki nokta arasındaki uzaklığa  diyelim.  nin moment çıkaran fonksiyonunu bulup  beklenen değerini hesaplayalım.

Birim uzunluğundaki çubuk üzerindeki noktalar  ve  olsun. Rasgele seçilen bu iki nokta arasındaki uzaklık (şekilde de görüldüğü gibi)  dir.



 ve  rasgele değişkenleri bağımsız olup aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Buna göre,  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

 , 

olarak yazılabilir.  olup aşağıdaki grafik bilgileri de dikkate alındığında  nin dağılım fonksiyonu,  için ,  için  ve  için  şeklinde yazılır (Şekil (3.2.3)). Dağılım fonksiyonunun türevinden olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak bulunur.



*Şekil 3.2.2 Örnek (3.2.3a) da aranan olasılık (alan)*

Buradan,  nin moment çıkaran fonksiyonu,



şeklinde hesaplanmıştır.

Moment çıkaran fonksiyonunun sıfır noktası komşuluğundaki Taylor serisi açılımı,



olup  olduğundan, bu fonksiyonun Taylor serisi açılımı,





şeklinde yazılabilir. Buradan,



ve



eşitlikleri elde edilir. Buradaki polinomlarının katsayıları eşitlendiğinde,

, 

ve  için diğer momentler



dir. Dolayısı ile,  rasgele değişkeninin bütün momentleri



olarak hesaplanmış olur.

b) İki kişi saat 12:00 ile 13:00 arasında belli bir yerde görüşmek üzere anlaşıyorlar. Görüşme yerine önce gelen  saat () bekleyecektir. Her ikisinin de anlaştıkları yere varmaları birbirinden bağımsız olup (a) da verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Bu iki kişinin karşılaşma olasılıklarını  diyelim) bulalım. Ayrıca,  olarak verildiğinde  yı (ne kadar bekleyeceğini) bulalım.

 ve  kişilerin belirlenen yere gelme saatini göstersin. İki kişinin karşılaşabilmesi için  olması gerekir. Buna göre, aranan olasılık (a) daki sonuçtan



dir.  ise bekleme süresi  eşitliğinden  saat veya  dakika olarak bulunur. Yani, önce gelen kişi en fazla 36 dakika bekleyecektir.

c) Birim uzunluğundaki düzgün bir çubuk üzerinde rasgele bir nokta işaretleyelim (bu nokta  olsun). Buna göre, elimizde uzunlukları  ve  olan iki doğru parçası vardır. Daha sonra,  aralığından rasgele bir nokta (buna  diyelim),  aralığından da ikinci bir nokta (buna da diyelim) işaretleyelim.  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile  nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Bu noktalar aşağıda şematik olarak gösterilmiştir.



 in olasılık yoğunluk fonksiyonu ile  verildiğinde  ve  nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonları

 



şeklindedir. Buradan,  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak bulunur.  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,



integralinin sonucundan,



olarak elde edilir.

Şimdi,  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Önce,  ve



olduğundan,  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu



olarak bulunur

Buraya kadar,  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde,  olmak üzere,  tek boyutlu rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu elde edilmeye çalışıldı. Şimdi,  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde, ,  reel değerli fonksiyonları için

, ,…, 

rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Burada verilen dönüşümlerden  için  lerin

, ,…,

şeklinde ters dönüşümlerinin bulunduğunu ve  fonksiyonlarının her bir bileşenine göre türevlenebildiğini varsayalım. Buradan, Jacobien matrisi



olarak yazılır.  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  ise  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,  olmak üzere,  için



şeklindedir.

**Örnek 3.2.4** a)  ve  aynı dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklinde verilmiş olsun.  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Ters dönüşümler  ve  olup Jacobien matrisi ve determinantı,

 ve 

dir.  ve  bağımsız olduğundan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  için,



dir. Buradan  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,  için



şekildedir. Ayrıca bu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



şeklinde yazılabildiğinden,  eşitliği sağlanır. Yani,  ve  rasgele değişkenleri bağımsızdır.

b) Şimdi de  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Bunun için,  şeklinde bir yardımcı dönüşüm tanımlayalım. Buradan,  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edildiğinde  nun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur. Ters dönüşümler  ve  olup Jacobien matrisi ve determinantı,

 ve 

şeklindedir. Buna göre,  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  için



dir. Herhangi bir  fonksiyonu çift () ise,  için,



dir. Buna göre,  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  ye göre çifttir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun  üzerinden integrali ( diyelim),







olup  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak bulunmuştur

**Örnek 3.2.5** a)  ve  aynı dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olsun.  ve  rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulalım. Ters dönüşümler,  ve  olup Jacobien matrisi ile determinantı,

 ve 

dir.  ve  bağımsız olduğundan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



dır.  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise  ve  için,



şeklindedir. Daha açık olarak ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



dir. Bu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonundan  ve  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları da,

 ve 

integrallerinin sonucundan

 

olarak bulunmuştur. Ayrıca, olduğundan  ve  rasgele değişkenleri bağımsızdır (bu sonuç Teorem (7.4.2) den de elde edilebilirdi).

b) ,  aynı dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verildiğinde,  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım.  yardımcı dönüşümü ile ters dönüşümler,  ve  olup Jacobien matrisi ile determinantı,

 , 

şeklinde hesaplanmıştır. Buradan,  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup  nun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,



den,



olarak bulunur.

c)  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun.  ,  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Ters dönüşümler,

 , 

olup Jacobien matrisi ve determinantı

, 

dir. Buradan,  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,



şeklinde bulunmuş olur. Diğer taraftan, marjinaller hesaplandığında,  rasgele değişkenleri bağımsız olmamasına rağmen,



eşitliği sağlandığından,  rasgele değişkenleri bağımsızdır

3.3. Üretici Fonksiyonlar Tekniği

İkinci bölümde, bazı üretici fonksiyonlardan söz edildi. Bu fonksiyonlar genellikle rasgele değişkenlerin momentlerinin hesaplanmasında kullanılmakla birlikte bazen rasgele değişkenlerin dönüşümlerinin olasılık fonksiyonlarının bulunmasında da kullanılır. Dönüşümün moment çıkaran fonksiyonu (varsa) bilinen bir dağılımın moment çıkaran fonksiyona benzeyebilir.

 ve  bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere,  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,  ve  nin moment çıkaran fonksiyonlarının çarpımı olarak yazılabildiğini () biliyoruz. Benzer şekilde,  nun karekteristik fonksiyonu da  dir.  nun moment çıkaran fonksiyonu (veya karekteristik fonksiyonu) bazen olasılık fonksiyonuna ihtiyaç duyulmadan bulunabilir.  nun moment çıkaran fonksiyonu (veya karekteristik fonksiyonu) bilinen bir dağılımın (genellikle beşinci bölümde bahsedilecek dağılımlar) moment çıkaran fonksiyonu ile aynı ise  nun olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu, o dağılımın olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu olur. Var olması halinde genellikle moment çıkaran fonksiyonu kullanılır. Moment çıkaran fonksiyonunun olmadığı hallerde karekteristik fonksiyon kullanılabilir.

**Örnek 3.3.1** a)  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olsun. Bu rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu yoktur, karekteristik fonksiyonu ise  için  dir (Örnek (2.6.5)). Bu olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız rasgele değişkenler  olsun.  lerin örneklem ortalaması olarak bilinen  rasgele değişkenini tanımlayalım. Bu rasgele değişkenin karekteristik fonksiyonu,



olduğundan,  ile  rasgele değişkenlerinin karekteristik fonksiyonları aynıdır. O halde, her ikisi de aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Yani,  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



dir.

b) rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olsun.  in karekteristik fonksiyonu (Maple VIII paket programı yardımı ile),



olarak hesaplanmıştır. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız rasgele değişkenler  olmak üzere,  örneklem ortalamasının olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım.  nin karekteristik fonksiyonu



olup,  ile  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonları aynıdır. Buradan,  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu  için



veya daha açık olarak,



şeklindedir

Bir  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu , karekteristik fonksiyonu da  olsun.  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,



ve karekteristik fonksiyonu da,



şeklindedir.

**Örnek 3.3.2** a)  ve aynı olasılık fonksiyonuna sahip bağımsız rasgele değişkenler olsun. Olasılık fonksiyonu  için



olarak verildiğinde,  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulalım.

 in moment çıkaran fonksiyonunun  (Örnek (2.5.3a)) olduğunu biliyoruz. Buradan,  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,



olup,  in moment çıkaran fonksiyonunda  yerine  gelmiştir. Buradan,  nun olasılık fonksiyonu  in olasılık fonksiyonunda  yerine  yazılması ile elde edilir. Yani,  nun olasılık fonksiyonu,



dir (Örnek (3.2.2) ile karşılaştırınız).

b)  ve  olmak üzere bağımsız  ve  rasgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları,



olarak verilmiş olsun. Dolayısı ile,  ve  nin moment çıkaran fonksiyonları da aynıdır.  in moment çıkaran fonksiyonu,



olup  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu da,



dir. Olasılık fonksiyonu,



olan bir  rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu (beşinci bölümde bahsedilecek olan özel dağılımlardan biridir)



dir. Buradan,  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu ile  nin moment çıkaran fonksiyonu aynıdır. O halde,  nın olasılık fonksiyonu



dir.

c) Bağımsız  ve  rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları  ve ,  için,





olarak verilmiş olsun. Bu rasgele değişkenlerin moment çıkaran fonksiyonları,

 ve 

olup  nin moment çıkaran fonksiyonu  ve  olmak üzere,



dir. Buna göre,  nun moment çıkaran fonksiyonu ile,  in moment çıkaran fonksiyonu aynı yapıdadır ( yerine ,  yerine  gelmiştir). Buna göre,  nun olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde,  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu da,



olup olasılık yoğunluk fonksiyonu,  ve  olmak üzere,



şeklindedir