4.3. Çözümlü Problemler

**4.3.1**  olmak üzere, bu  reel sayılarının aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaları

, , 

şeklinde hesaplanır.  olduğunu gösteriniz (Casella ve Berger (2002), sayfa 191).

*Çözüm*: Değer kümesi  olan herhangi bir  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu



olarak verilmiş olsun.  fonksiyonu konkavdır ( olup her zaman negatiftir). Bu durumda,  rasgele değişkeninin beklenen değeri

 

olup



ve



dir. Jensen eşitsizliğine göre,  olduğundan,



yazılabilir. Yani,  eşitsizliği elde edilir. Logaritma fonksiyonunun özelliğinden ise  dir. Yine  fonksiyonunun konkav olduğundan,



Eşitsizliği yazılır.  olup  dir. Yani,  olup logaritmanın özelliğinden,  yani,  elde edilir. Bu iki eşitsizlik birleştirildiğinde  elde edilir.

**4.3.2** Sonlu beklenen değere sahip bir rasgele değişken  olsun.  ve  de azalmayan konveks bir fonksiyon ise,  olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*:  in olasılık yoğunluk fonksiyonu  olsun (kesikli ise integral yerine toplam gelir).  konveks olduğundan Jensen eşitsizliğine göre,  dir. Ayrıca,  azalmayan ( ise, ) olduğundan,





şeklinde aranan eşitsizlik elde edilir.

 olacak şekilde bir rasgele değişken için,  eşitsizliği  nin bir sonucu olarak elde edilir. Bunun için  denirse,  olup  konveks ve  için azalmayandır. Yukarıdaki eşitsizlik  fonksiyonuna uygulandığında,



elde edilir. Buradan her  için,



eşitsizliği yazılır. Yani,  dir.

**4.3.3**  sürekli bir rasgele değişken ve ,  olsun. Buna göre,

a)  ise 

b)  ise 

eşitsizliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*: Sorunun çözümüne geçmeden önce  olmak üzere önce



eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Buradaki beklenen değer



şeklinde yazılabildiğinden,  bulunur. Bu eşitsizlik yardımı ile istenen eşitsizlikler kolayca gösterilir.

a)  ise  olup,



eşitsizliği yazılır. Buradan,  için  ve  olduğundan,





şeklinde aranan eşitsizlik elde edilmiş olur.

b)  olsun.  sürekli olduğundan  dir (kesikli ise  dir). Buradan,



eşitsizliğinde  yazıldığında aranan eşitsizlik,



şeklinde elde edilir.

Burada,  alınmasının nedeni,  oranının bu noktada minimum olmasıdır. Yani,  fonksiyonu ( fonksiyonudur)  noktasında minimumdur.  ve  olduğundan,



olup,



bulunur. İkinci türev bu noktada



pozitif olup,  oranının  noktasında minimum olduğu görülür.

**4.3.4** Markov eşitsizliğini kullanılarak,  için  olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*: Kesikli bir  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu  olmak üzere,



şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda,  ve  olasılığı,





dir. Markov eşitsizliğinden,

 veya 

şeklinde aranan eşitsizlik elde edilir.

Aynı olasılık fonksiyonu kullanılarak Jensen eşitsizliğine göre  için  eşitsizliği de yazılabilir. Bunun için  için  fonksiyonu konveks olup, Jensen eşitsizliğine göre  dir.  in beklenen değeri



olup,  dir. Yani, Jensen eşitsizliğinden  olup,



elde edilir. Buradan da, dir. Ayrıca,



olduğundan  elde edilir.

**4.3.5** a) Her  için  olduğunu gösteriniz.

b) Her  için  olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*: a)  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun. Buna göre,



dir. Ayrıca,  olup Markov eşitsizliğinden,



eşitsizliği yazılır. Eşitsizlik biraz daha düzenlendiğinde

 veya 

şeklinde aranan eşitsizlik elde edilir.

b)  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,  şeklinde verilmiş olsun.  olasılığı,



dir. Ayrıca,



olup yine Markov eşitsizliğinden,

 veya 

eşitsizliği elde edilir.

**4.3.6** Sonlu beklenen değere sahip herhangi iki rasgele değişken  ve  olsun. Buna göre,

a) b) 

c) 

eşitsizliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*: Önce,

 ve 

olduğunu hatırlayalım.  fonksiyonu konveks olup Jensen eşitsizliğinden,  dir. Buradan da  olup

 

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi eşitsizliklerin ispatına geçebiliriz.

a)  nin ifadesi Jensen eşitsizliği ile beraber kullanıldığında ( fonksiyonu konvekstir),



elde edilir. Yani,  dir.

b) Benzer şekilde  nin yukarıdaki ifadesi Jensen eşitsizliği ile beraber kullanıldığında,



bulunur. Dolayısı ile,  dir.

c)  olduğundan, kolayca görüleceği gibi



dir.

 **4.3.7** Değer kümesi olan  herhangi bir kesikli rasgele değişken,  ve  azalmayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda  olduğunu gösteriniz.

 *Çözüm*:  in olasılık fonksiyonu,  için  olsun. Buradan eşitsizliğin ispatı için,

 

olduğunun gösterilmesi gerekir.  ve  azalmayan fonksiyonlar olduğundan  ve  için  dir. Buradan da,

 

yazılabilir.  olduğundan, eşitsizliğin sol tarafı  ile çarpılıp toplandığında







eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı kullanıldığında



eşitliği elde edilir. Buradan da, bu iki eşitlik

 

eşitsizliğinde kullanıldığında,  eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik literatürde, *Chebyshev Lemması* olarak bilinir (Chebyshev eşitsizliği ile karıştırılmasın). Fonksiyonlardan biri azalmayan diğer artmayan ise eşitsizlik yön değiştirir.

**4.3.8.** Beklenen değeri sıfır, varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenler  olsun ( ve ).  rasgele olmayan değişkenler olmak üzere,  modelini göz önüne alalım. Buradan,

  

rasgele değişkenlerinin varyansları sırası ile,

, , 

dir. Bu varyansları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

*Çözüm*: Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

 ve 

olduğunu biliyoruz (Örnek (4.2.1)). Buradan  ve  dir. Yani,  diğer iki varyansdan da küçüktür.  ve  arasındaki sıralamaya bakalım.  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun. Buna göre,  fonksiyonu konvekstir. Jensen eşitsizliğinden  olup beklenen değerler,

 ve 

şeklinde hesaplanmıştır. Jensen eşitsizliğine göre,



eşitsizliği yazılabilir. Buradan,



bulunur. Yani,  dır. Bu eşitsizlikler birleştirildiğinde,



sıralaması elde edilir. Yani,  dir.

**4.3.9**  ve  rasgele değişkenleri için ,  ve  ile  arasındaki korelasyon  olsun. Bu durumda,



olduğunu gösteriniz (Öztürk, 1993, sayfa 298).

*Çözüm:* Önce, Problem (4.3.7) de verilen  ifadesi  ve  rasgele değişkenleri için



şeklinde düzenlendiğinde,  olup Cauchy-Schwartz eşitsizliği de  ve  rasgele değişkenleri için,



şeklinde yazılır. Buradan da,



eşitsizliğine ulaşılmış olur. Ayrıca,



dir. Dolayısı ile aranan eşitsizlik,



den  olarak bulunmuş olur.

**4.3.10**  ve  aralarındaki korelasyon  olan herhangi iki rasgele değişken olsun.  için  olmak üzere,



olduğunu gösteriniz (Öztürk, 1993, sayfa 299).

*Çözüm:* Eşitsizliğin sol tarafındaki olasılık açık olarak



şeklinde yazılır. Markov eşitsizliğinden de,



bulunur. Böylece,



eşitsizliği elde edilmiş olur.