5.5. Çözümlü Problemler

**5.5.1** Bernoulli ve Binom dağılımlarının basıklık katsayılarını hesaplayınız.

*Çözüm:* olsun. Bu durumda ,  ve  için  olduğunu biliyoruz.  olmak üzere dağılımın dördüncü merkezi momenti,



dır. Buradan, Bernoulli dağılımının basıklık kaysayısı



olarak hesaplanmıştır.

 olsun.  olmak üzere, Binom dağılımının merkezi momentleri arasında,



şeklinde bir bağıntı vardır (Akdeniz (2006) sayfa 224-225). Ayrıca, ,  ve  olup üçüncü ve dördüncü merkezi momentler bu eşitlikten ardışık olarak elde edilir.  için üçüncü merkezi moment,



ve  için dördüncü merkezi moment de,



dir. Buradan Binom dağılımının basıklık katsayısı da,



olarak bulunur.

**5.5.2**  ve  bağımsız geometrik dağılıma () sahip rasgele değişkenler olsun.  verildiğinde,  in koşullu olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

*Çözüm:* Önce,  ve  olduğundan  olur. Buna göre,  koşullu olasılığı  için



dir. Buradan,  verildiğinde,  in koşullu olasılık fonksiyonunu



olup koşullu dağılım kesikli düzgün dağılımdır.

**5.5.3**  olsun. Bu durumda,  ve  için olduğunu gösteriniz (Casella ve Berger, 2002, sayfa 126).

*Çözüm:* Negatif Binom dağılımının olasılık fonksiyonu,



şeklinde olup bu fonksiyon,



olarak da yazılabilir. Buradan,  olmak üzere,  değeri









olarak hesaplanır. Eşitliğin her iki tarafı  ile çarpılırsa,



şeklinde aranan eşitlik elde edilmiş olur. Bu formül kullanılarak  denirse,



bulunur. Eşitliğin biraz düzenlenmesi ile de,



elde edilir. Buradan da,  olup dağılımın beklenen değeri  olarak hesaplanmış olur.

**5.5.4** a) olsun.  olasılığını hesaplayınız.

b)  olmak üzere,  olasılığını hesaplayınız. Bu iki olasılık arasındaki benzerliği yorumlayınız.

*Çözüm*: a)  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,



olup olasılıklar aşağıdadır.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Bu tablo değerlerinden  olasılığı



olarak hesaplanmıştır.

b)  ise,



dir.  kesikli rasgele değişken olduğundan  ile olasılıkları aynıdır.  in beklenen değer ve varyansı ,  dır. Buradan,



olduğundan, hesaplanan iki değer birbirine çok yakındır. Burada Binom dağılımına süreklilik düzeltmesi yapılmaktadır. Yani, alt sınırdan  çıkartılıp üst sınıra  eklenmektedir.  olduğundan,  olasılığı hesaplanmak istendiğinde  in alt ve üst sınırlarını kapsayacak şekilde bir düzeltme yapılır.  ise  dir. Buradaki  sayısı süreklilik düzeltmesidir. Bu düzeltme yapıldıktan sonra, her iki taraftan beklenen değeri çıkartılıp standart sapmasına bölünerek alt ve üst değerleri elde edilir.  değeri ne kadar büyük ise bu olasılıklar da birbirine o kadar yakındır.

**5.5.5**  olsun.  in,  şeklinde tek değerler alması olasılığını hesaplayınız.

*Çözüm*:  ise dağılımın olasılık fonksiyonu,  dir (). Buradan,  in  gibi tek sayıları alması gibi değer alması) olasılığı,



dir.

**5.5.6**  ve  bağımsız standart normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun.



olmak üzere,  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

*Çözüm*: Standart normal rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu  olsun. Ayrıca,  in (veya  nin) dağılım fonksiyonu



şeklindedir.  nin dağılım fonksiyonu  olmak üzere,  olduğunu göstereceğiz.  standart normal dağılıma sahip bir rasgele değişken olduğundan,  ve  dır. Buradan  nin dağılım fonksiyonu için,





eşitliği elde edilir. Burada  ve  durumları ayrı ayrı incelenmelidir.  ise,  olup 





dır. Yani,  için çözüm tamamlanmıştır. Diğer taraftan  ise  ve  olduğundan ,



dir. Her iki durumda da,  olduğundan  rasgele değişkeni de standart normal dağılıma sahiptir.

Burada,  ve  nin her ikisi de standart normal rasgele değişkenler olmasına rağmen,  iki boyutlu normal değildir.

**5.5.7**  ve  serbestlik dereceleri  ve  olan bağımsız ki-kare dağılımılı rasgele değişkenler olsun.  rasgele değişkenini tanımlayalım.  olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*:  ve  bağımsız olduğundan,  yazılır.

 ise  dir.  olmak üzere  beklenen değerini hesaplayalım.  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup  değeri,







olarak hesaplanmıştır. Buradan,  rasgele değişkeninin beklenen değeri



olarak bulunmuş olur.

**5.5.8**  bağımsız  dağılımılı rasgele değişkenler olsun.

a)  olmak üzere  olduğunu gösteriniz.

b)  olsun. Bu durumda,



olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*: a) rasgele değişkenleri  şeklinde yazıldığında,  rasgele vektörü, beklenen değeri , varyans-kovaryans matrisi  olan değişkenli normal dağılıma sahiptir. Yani,  dir. Burada,

 ve 

dir. Şimdi,  olduğunu gösterelim. Bunun için,



yazalım. Bu durumda,  ise  ve  olup,  rasgele vektörünün varyans-kovaryans matrisi



şeklinde olur.  olduğundan aranan olasılık,



dir.

b)  denirse,  in dağılımı beklenen değeri  varyans kovaryans-matrisi  olan değişkenli normaldir. Buradan,  olup  olasılığını hesaplayabiliriz. Burada,



olup  olasılığı için  rasgele vektörünü



şeklinde yazalım. Buradan, integrallerin ardışık olarak hesaplanması ile aranan olasılık,







olarak hesaplanmış olur.

**5.5.9** Rayleigh dağılımının ve  aralığındaki düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile,

 

dir.  olsun.

a)  ve  bağımsız rasgele değişkenler ise  ve  nin bağımsız standart normal dağılımlı rasgele değişkenler olduğunu gösteriniz.

b) Tersine olarak,  ve  bağımsız standart normal dağılımlı rasgele değişkenler ise,  ve  rasgele değişkenlerinin yukarıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip bağımsız rasgele değişkenler olduğunu gösteriniz.

*Çözüm:*a)  ve  bağımsız olduğundan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklinde yazılabilir.  ise  ve  rasgele değişkenlerinin değer kümeleri  olup ters dönüşümler  ve  dir. Jacobien matrisi için türevler,

 ve 

olup Jacobien matrisi ile determinantı da,

ve 

olarak hesaplanmıştır. Buradan  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak yazılır. Yani,  ve  bağımsız standart normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir.

b)  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup  ve  den ters dönüşümler,



şeklindedir. Jacobien matrisi için türevler,

 ve 

dir.  ve nin tanım bölgeleri sırası ile  ve  olup Jacobien matrisi ve determinantı,

 ve 

dir. Buradan,  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  ve  için



olarak yazılır. Yani  ve , olasılık yoğunluk fonksiyonları

** **

olan bağımsız rasgele değişkenlerdir.

**5.5.10**  ve  iki boyutlu standart normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun.  olmak üzere ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  için,



dir. Buna göre,  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

*Çözüm*:  yardımcı dönüşümü ile ters dönüşümler  ve  olup Jacobien matrisinin determinantı  dir. Buradan  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  için



olup  nun olasılık yoğunluk fonksiyonu için  nin değer kümesi üzerinden integrali alınır.  fonksiyonu  ye göre çift olup, çift fonksiyonun simetrik bir bölge üzerinden integrali,



şeklindedir. Buradan  olmak üzere,  nun olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak bulunmuştur. Yani,  nun olasılık yoğunlu fonksiyonu,



dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu, Cauchy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonuna benzemektedir.