7.7. Yansızlık (Unbiasedness)

Tahmin edicilerin yansızlığı, tahmin teorisinde en çok kullanılan özelliklerden biridir. Bir parametre için birden çok yansız tahmin edici bulunabildiği gibi, bazen yansız tahmin ediciler olmayabilir.

**Tanım 7.7.1**  parametresi  olan kitleden bir örneklem,  de  nın herhangi bir tahmin edicisi olsun.  nin beklenen değeri mevcut ve  ise  ye  için *yansız* bir tahmin edici denir

Herhangi bir parametre için yansız tahmin edici bulunamayabilir. Örneğin,  dağılımının beklenen değeri yoktur. Dolayısı ile, **** için yansız tahmin edici bulunamaz.

**Örnek 7.7.1** a)  dağılımından bir örneklem  olsun.  ve  tahmin edicilerinin beklenen değerlerinin  ve  olduğunu biliyoruz (Örnek (7.6.1a)). Yani,  ve  nin her ikisi de  için yansızdır. Ayrıca,  olduğu da aynı örnekte gösterildi.  için yine sıra istatistiklerine bağlı olarak başka yansız tahmin ediciler de bulunabilir. Örneğin,  denirse,  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

 

olup,  dir. Buradan da  tahmin edicisi de  için yansızdır. Ancak,  sıra istatistiğine bağlı  yansız tahmin edicisinin varyansı  nin varyansından küçüktür.

b)  dağılımından alınan birimlik bir örneklem  olmak üzere  parametresi için yansız bir tahmin edici,



olarak alınabilir. Burada, ,  ve  değerlerini alan Bernoulli rasgele değişkeni olup



dır.

c) Yine  dağılımından bir örneklem  olsun. Bu defa  için yansız bir tahmin edici bulmak isteyelim. Bunun için

 

olduğunu biliyoruz. Poisson dağılımının beklenen değer ve varyansı aynı olduğundan,



yazılır. Buradan,  denirse,  olur. Yani ,  için yansızdır.

d) Şimdi,  parametresi  olan Bernoulli dağılımından bir örneklem olsun ve  için yansız bir tahmin edici bulmaya çalışalım.

 olup,  ve  dir. Buna göre,  nin ikinci momenti



olarak hesaplanmıştır. Buradan da,



olduğundan  istatistiği  için yansızdır

**Tanım 7.7.2** *(Yan)*  parametresi  olan kitleden bir örneklem,  de  nın herhangi bir tahmin edicisi olsun.  nin mevcut olması halinde  değerine  nin *yanı* (veya *yanlılığı*) denir ve  ile gösterilir. Yani,  dır

Tahmin edicilerin bu özelliklerinin yanında, genellikle küçük varyanslı tahmin ediciler tercih edilir. Bazen yanlı bir tahmin edicinin varyansı, yansız tahmin edicinin varyansından küçük olabilir. Yanlı tahmin edicinin varyansı küçük ve yanlılığı herhangi bir şekilde azaltılabilirse, bu yanlı tahmin edici tercih edilebilir. Yanlı tahmin edicilerin yanlılığı değişik yöntemlerler ile azaltılabilir*. Jackknife metodu* bunlardan biridir.

**Örnek 7.7.2**  parametresi  olan Bernoulli dağılımından bir örneklem olsun.  parametresini tahmin etmek isteyelim. Jackknife metodu tahmin edicilerin yanlılığını azaltmak için kullanılan bir yöntemdir. Bu tahmin ediciler aşağıdaki gibi hesaplanır (1-adım).  nın tahmin edicileri  şeklinde verilmiş olsun.  için

 

tahmin edicilerini tanımlayalım (örneklemden  çıkartılıyor). Buradan,  nın Jackknife tahmin edicisi,



şeklinde hesaplanır. Genellikle,  dir.

Şimdi,  nin en çok olabilirlik tahmin edicisi (ileride bahsedilecektir)  olmak üzere,  nin en çok olabilirlik tahmin edicisi  dir (Teorem 7.9.2.1). Bu en çok olabilirlik tahmin edicisine bağlı Jackknife tahmin edicisini bulalım (başka tahmin ediciler kullanarak da Jackknife tahmin edicileri yazılabilir). Buna göre,  için 



olarak yazılır. Ayrıca,  ler Bernoulli dağılımına sahip rasgele değişkenler olup sadece  ve  değerlerini aldığından  dir. Buradan  tahmin edicisi



şeklinde yazılabilir. Buradan da,  nin Jackknife tahmin edicisi,









olarak elde edilir. Bu tahmin edici Örnek (7.7.1d) deki yansız tahmin edici ile aynıdır. Jackknife tahmin edicilerinin yanlılığı genellikle daha küçüktür. Burada, bir önceki örnekte verilen yansız tahmin edici ile Jackknife tahmin edicisi aynıdır. Bu her zaman böyle olmayabilir

7.8. Asimptotik Normallik

Tahmin edicilerin dağılımları istatistiki sonuç çıkarım açısından çok önemlidir. İstatistiki sonuç çıkarım için de normallik çok önemlidir. Tahmin edicilerin dağılımları normal olmasa bile, merkezi limit teoremine ile limit durumunda normallik elde edilebilir. Tahmin edicilerin dağılımları MLT de olduğu gibi bazen kolay bulunabilmesine rağmen, asimptotik dağılımı bulmak bazen zordur. Böyle durumlarda limit dağılımları elde edilmeye çalışılır.

 beklenen değeri , varyansı  olan kitleden bir örneklem ise merkezi limit teoremine göre,  iken  olup  asimptotik normaldir diyebiliriz. Bunu,  olarak ifade edelim. Tahmin ediciler bazen  nin bir fonksiyonu olduğu gibi, bazen karmaşık olabilir. Örneğin,  nin dağılımı, örneklem normal ise serbestlik derecesi  olan ki-karedir. Ancak, örneklem normal değilse  nin dağılımını bulmak kolay değildir. Bu durumda, limit dağılımından faydalanılır. Bunun için de Taylor serisi yaklaşımları kullanılır.

 fonksiyonu  dereceden türevlenebilir (ve sıfırdan farklı) ise, herhangi bir  sabiti için  fonksiyonunun  noktası komşuluğundaki Taylor serisi açılımı,



olarak verilir. Burada,  dir. Eğer  varsa,



dır (Casella ve Berger, 2002, sayfa 241).

Benzer şekilde,  rasgele değişkenleri  olmak üzere,  ve  için  fonksiyonu  noktalarında  lere göre türevlenebilir olsun. Buradan da,



varsa,  fonksiyonunun  noktasındaki birinci dereceden Taylor serisi açılımı



şeklinde yazılır. Burada,  kalan terimi göstermektedir. Buradan,  fonksiyonu için,



yaklaşımı elde edilir. Buna göre,  rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansı için





yaklaşımları kullanılabilir.  olduğundan  dir.  ise  fonksiyonunun  noktası komşuluğundaki birinci dereceden Taylor serisi açılımından  yazılır.

 beklenen değeri  olan kitleden bir örneklem ve  olsun.  için bir tahmin edici  ise  parametresini tahmin etmek için



yaklaşımı kullanılır. Burada  nin beklenen değer ve varyansı için de,

 ve 

yaklaşımları kullanılabilir. ,  parametresi için tahmin edcicilerin bir dizisi ise  iken

 

olsun. Belirli bir  fonksiyonu için  var ve sıfırdan farklı ise  iken

 

dir. Eğer,  ise ikinci dereceden Taylor serisi açılımı kullanılır ve  fonksiyonunun ikinci dereceden Taylor serisi açılımı



olup  iken  olduğundan



yazılır. Buradan da,  iken



asimptotik yaklaşımı elde edilmiş olur.

**Örnek 7.8.1**   dağılımından bir örneklem  olsun.  örneklem ortalaması  nın bir tahmin edici ise  de  nın bir tahmin edicisi olarak alınabilir. Merkezi limit teoreminden  olduğunu biliyoruz ().  denirse  olup,  in asimptotik dağılımı



olur. Benzer şekilde,  nın tahmini için  önerilebilir. Bu durumda  alındığında,  olup  in asimptotik dağılımı



şeklinde yazılır.  tahmin edicisinin varyansı için bir tahmin de,



nin değeri alınabilir

Tahmin edicilerin asimptotik normalliği ile ilgili bazı özellikler aşağıdaki örnek üzerinde açıklanmaya çalışılmıştır. Burada önemli olan, verilen fonksiyonun birinci dereceden Taylor serisine açılımıdır. Neredeyse, bütün asimptotik özellikler (normallik ile ilgili) fonksiyonun Taylor serisi açılımına bağlıdır.

**Örnek 7.8.2** a)  beklenen değeri  varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenler olsun.  ifadesi



şeklinde yazılabildiğinden  iken  ise  olduğu görülür. Ayrıca,  olduğundan asimptotik dağılım,  standart normal rasgele değişkeni göstermek üzere,  nin asimptotik dağılımı  iken



şeklinde olur.

b) Şimdi,  ve her  için  olsun. Bu durumda,  iken

 ve 

dir.  fonksiyonunun  noktası komşuluğundaki birinci dereceden Taylor serisi açılımı,



olup bunu



şeklinde yazabiliriz. Burada  iken,



olacağından  iken  elde edilir. Ayrıca,  için  ve  olup  dir. Türevler yerine yazıldığında,



ve



eşitlikleri yazılır. Buradan da,



eşitliğinden asimptotik dağılım



şeklinde elde edilir.

c)  alınırsa,  parametrik fonksiyonu için  tahmin edicisi düşünülebilir. Böylece,  fonksiyonunun  noktası komşuluğundaki Taylor serisi açılımı,



olup birinci derece açılım



şeklindedir. Buradan asimptotik dağılım  iken,



şeklinde elde edilir.

d)  iki boyutlu bağımsız ortalama vektörü ile varyans-kovaryans matrisi

 ve 

olan aynı dağılımlı rasgele vektörlerin bir dizisi olsun.  istatistiğinin asimptotik dağılımını bulmak isteyelim.

Bunun için,  denirse fonksiyonun her iki bileşenine göre türevleri vardır ve kısmi türevler,



şeklindedir. Ayrıca merkezi limit teoremine göre  iken,

 ve 

dir. Diğer taraftan



dir. Buradan,  fonksiyonunun  noktası komşuluğundaki Taylor serisi açılımı,



şeklinde olup türevler yerine konulduğunda,



eşitliği elde edilir. Buradan da asimptotik dağılım  iken,



olarak elde edilir. Burada,



dir. Aslında bu sonuç, asimptotik dağılımın normal olduğunu (yani,  nin iki boyutlu) olduğunu göstermeye yetmez.

Problemin çözümünü tamamlamak için, asimptotik dağılımın iki boyutlu normal olduğunun gösterilmesi gerekir. Merkezi limit teoremi tek değişkenli rasgele değişken dizileri için verildi. Bu sonuç, çok değişkenli rasgele değişken dizileri için genellenemeyebilir. Bu iki istatistiğin, herhangi bir lineer birleşiminin asimptotik normal olduğunun gösterilmesi gerekir (Serfling, 1980). Bunun için,  ve  olacak şekilde bir  için



elde edilir. Burada,  ler bağımsız beklenen değeri sıfır varyansı  dir