7.9. Tahmin Edicileri Bulma Yöntemleri

Buraya kadar, tahmin edicilerin bazı özellikleri incelendi. Tahmin edicilerin bu özellikleri yanında başka özellikler de aranabilir. Yani, tahmin edicilerin özellikleri bunlarla sınırlı değildir. Eğer varsa, en iyi tahmin edicinin bulunması istenebilir. “En iyi tahmin edici” göreceli bir kavram olup bunun iyi tanımlanması gerekir. Bundan önceki kısımlarda, tahmin edicicilerin nasıl bulunacağı hakkında hiçbir şey söylenmedi. Yeterli tahmin edicilerin faktörizasyon teoremi yardımı ile bulunabileceğini biliyoruz. Ayrıca, yeterli tahmin ediciler tek olmayıp başka yeterli tahmin ediciler de vardır. Bu kısımda, tahmin edicilerin bulunma yöntemlerinden birkaç tanesi incelenecektir. Bunlar literatürde çok kullanılan yöntemlerdir. Momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi, Bayes yöntemi ve en küçük kareler yöntemi bu kısımda incelenecek yöntemlerdir. En küçük kareler yöntemi, iki değişken arasındaki ikişki ile ilgili olup çok geniş uygulama alanına sahiptir. Bu kısımda, en küçük kareler yöntemi üzerinde fazla durulmayacak, ileride ayrı bir bölüm olarak ele alınacaktır.

**7.9.1. Momentler Yöntemi**

Parametrelerin momentler tahmin edicilerinin bulunabilmesi için kitle momentlerinin var olması gerekir. Örneğin, Cauchy dağılımının parametresi için momentler tahmin edicisi bulunamaz. Momentler tahmin edicileri, kitle momentleri hesaplanarak örneklem momentlerine eşitlenmesi ile bulunur.

 olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden bir örneklem olsun.  olmak üzere, kitle momentleri bu parametrelere bağlıdır. Yani,  için  kitle momentleri ve

, , , …, 

örneklem momentleri hesaplanır.  olmak üzere,



eşitliklerinden elde edilecek  çözümü  parametresinin *momentler tahmin edicisidir*. Burada, parametre sayısı kadar kitle momenti ile örneklem momenti hesaplanır. Kitlenin bir tane parametresi varsa, kitlenin beklenen değeri örneklem ortalamasına eşitlenir.

**Örnek 7.9.1.1** a)  dağılımından bir örneklem  olsun. Kitlenin iki tane parametresi olup dağılımın ilk iki momenti,

 ve 

dir. Buradan,

 ve 

şeklindeki  ve  örneklem momentleri kullanılarak,

 ve 

eşitliklerinden  ve  nin momentler tahmin edicileri sırası ile

 , 

olarak bulunur. Momentler tahmin edicileri yanlı olabilir. Örneğin,



olup yanlılığı  dir.

b)  olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olan dağılımdan bir örneklem olsun. Bu kitlenin bir tane parametresi vardır. Dağılımın beklenen değeri,



olup  eşitliğinden  nın momentler tahmin edicisi  olarak bulunur. Bu tahmin edicinin beklenen değerini ve varyansını hesaplamak kolay değildir (bu tahmin edici aslında karşıt orana (odds ratio) karşılık gelmektedir). Bu değerlere ihtiyaç duyulduğunda asimptotik sonuçlar kullanılabilir.

 ve 

olup kitle varyansı



dır. Buradan,  fonksiyonu için



şeklinde birinci dereceden Taylor serisi açılımından asimptotik dağılım

 

şeklinde yazılır. Burada,  için,  ve  dir. Dolayısı ile,



olduğundan asimptotik dağılım  iken



olarak bulunur. Burada,  olup  dir.

c)  parametreleri  ve olan Binom dağılımından bir örneklem olsun.

 dağılımının ilk iki momenti,

 ve 

olup  ve  parametrelerin momentler tahmin edicilerini göstermek üzere,

 ve 

denklemlerinin çözümünden  ve  parametrelerinin momentler tahmin edicileri sırası ile,



olarak bulunur

**7.9.2. En Çok Olabilirlik Yöntemi**

Olabilirlik yönteminin temel prensibi “Örneklem değerlerine bakarak, örneklem değerlerini elde etme olasılıklarının (veya olasılık yoğunluklarının) en yüksek olduğu değerlere karşılık gelen örneklem değerinin bilinmeyen parametre için bir tahmin olarak seçimidir.”

En çok olabilirlik yöntemi, tahmin edicileri bulmak için kullanılan bir yöntemdir. En çok olabilirlik tahmin edicileri aşağıda tanımı verilen olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değerlerdir.

**Tanım 7.9.2.1** *(Olabilirlik fonksiyonu)*  olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden bir örneklem olsun.  nın olabilirlik fonksiyonu (likelihood function)  olmak üzere,



dir

Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değer (örneklemin bir fonksiyonu)  nın *en çok olabilirlik tahmin edicisidir*. Yani,  nın en çok olabilirlik tahmin edicisi



dir. Olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonu yerine genellikle fonksiyonun logaritması (log-likelihood, ) maksimize edilir.  nın en çok olabilirlik tahmin edicisi olabilirlik fonksiyonunu veya log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değerdir. Yani,



dir. Ancak, bazı durumlarda log-olabilirlik fonksiyonu tanımlı olmayabilir. Olabilirlik fonksiyonu parametrenin bir fonksiyonu olup, fonksiyonun maksimumu bulunmayabilir. Aşağıdaki örnekte, bazı dağılımların parametrelerine ilişkin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmiştir.

**Örnek 7.9.2.1** a)  dağılımından bir örneklem  olsun. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu,



şeklindedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması (log-olabilirlik fonksiyonunu) da



dir. Fonksiyonun birinci türevlerini sıfır yapan nokta veya noktalarda fonksiyon maksimum ya da minimuma sahiptir. Bu nokta veya noktaların maksimum olduğunu görmek için de ikinci türevlere bakılır. Buna göre birinci türevler;



olup türevlerin sıfıra eşitlenmesi ile çözümler



eşitliklerinden  ve  şeklinde bulunmuştur. Yani, olabilirlik fonksiyonu bu noktalarda maksimum ya da minimum değerini alır. Bu noktalardaki ikinci türevler,



ve



şeklinde olduğundan  ve  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri,



dir.

b) Şimdi,  Örnek (7.9.1.1b) de verilen kitleden bir örneklem olsun.  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu  için  olup  nın olabilirlik fonksiyonu,



ve log-olabilirlik fonksiyonu da,



şeklindedir. Birinci türevin sıfıra eşitlenmesi ile

 

eşitliğinden çözüm

 

olarak bulunur. Bu çözümün ikinci türevde yerine konulması ile



olduğu görülür. Buradan  nın en çok olabilirlik tahmin edicisi,

 

dir. Bu tahmin ediciyi,  olmak üzere  şeklinde yazabiliriz. Şimdi  nın bazı özelliklerini inceleyelim. Önce,  denirse  nin değer kümesi  olup olasılık yoğunluk fonksiyonunun,



olduğu gösterilebilir. Buna göre  olup,



dır. Ayrıca  nun olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup  nın beklenen değeri,





olarak bulunmuştur. Bu tahmin edici yansız değildir. Ancak,  olduğundan en çok olabilirlik tahmin edicisi asimptotik yansızdır. Benzer şekilde,  nin ikinci momenti,



olarak hesaplanmıştır. Buradan, en çok olabilirlik tahmin edicisinin varyansı da,



olur. Buna göre,  iken  ve  olduğundan  en çok olabilirlik tahmin edicisi tutarlıdır.

c)  beklenen değeri  olan Üstel dağılımdan bir örneklem olsun.  nın olabilirlik fonksiyonu,



ve log-olabilirlik fonksiyonu da,



şeklindedir. log-olabilirlik fonksiyonunun birinci türevinin sıfıra eşitlenmesi ile,



elde edilir. Buradan da çözüm  olur. Ayrıca,



olduğundan  nın en çok olabilirlik tahmin edicisi  dir.

d) Bernoulli dağılımının parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulalım. Olabilirlik fonksiyonu,



den log-olabilirlik fonksiyonu,



olarak yazılır. Buradan, birinci türevin sıfıra eşitlenmesi ile



eşitliğinden çözüm  olarak elde edilir.  noktasında ikinci türev negatif olup  nin en çok olabilirlik tahmin edicisi  dir

Bazen parametrelerin yerine, parametrelerin fonksiyonunun en çok olabilirlik tahmin edicisinin değerine ihtiyaç duyulur. Örneğin, Poisson dağılımında  yerine  şeklinde  olasılığının en çok olabilirlik tahmini bulunmak istenebilir. Dağılımın esas parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunduktan sonra parametrenin fonksiyonunun en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunabilir (Hogg, McKean ve Craig (2005), sayfa 316). Aşağıdaki teorem bunu ifade etmektedir. Fonksiyon üzerinde herhangi bir kısıtlama söz konusu olmayıp, fonksiyonun bire bir olması halinde teoremin ispatı açıktır.

**Teorem 7.9.2.1**  nın en çok olabilirlik tahmin edicisi  ise  de  nın en çok olabilirlik tahmin edicisidir

Parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin, olabilirlik fonksiyonunun türevlenebilir olması halinde nasıl bulunacağını yukarıda gördük. Olabilirlik fonksiyonu bazen türevlenemeyebilir.

**Örnek 7.9.2.2** a)  beklenen değeri , varyansı  olan normal dağılımdan bir örneklem ise,  nün en çok olabilirlik tahmin edicisi  olup  nin en çok olabilirlik tahmin edicisi  dir (Teorem (7.9.2.1)).

b)  olasılık yoğunluk fonksiyonu



olan kitleden bir örneklem olsun. Bu dağılım Laplace dağılımı veya çift üstel (double exponential) dağılım olarak da bilinir. Buna göre log-olabilirlik fonksiyonu,



olup fonksiyonun birinci türevi



dir.

Burada,  işaret fonksiyonu olup değeri  in durumuna göre, ,  veya  olabilir. Ayrıca,  için  dir. Birinci türevin sıfıra eşitlenmesi ile,  nın en çok olabilirlik tahmin edicisi  olur (medyan verileri tam ortadan ikiye ayırır).

c)  parametresi  olan düzgün dağılımdan bir örneklem olsun. Yani,  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup  nın olabilirlik fonksiyonu,  şeklinde yazılabilir.

Burada, olabilirlik fonksiyonu  ya göre türevlenemez. Fonksiyon,  için  nın azalan bir fonksiyonudur (diğer yerlerde sıfırdır). Böylece,  nın en küçük değerinde olabilirlik fonksiyonu maksimum değere ulaşır. Dolayısı ile,  nın en çok olabilirlik tahmin edicisi,  dır

Tahmin edici, örneklem içindeki bilgiyi özetleyen bir rasgele değişkendir. Bu özet bilgi ile, kitle parametreleri hakkında bazı istatistiki sonuç çıkarımlar yapılır. En çok olabilirlik yöntemine göre, bu veri indirgemedeki temel prensip, gözlenen herhangi iki değer için (bunlar  ve  olsun) olabilirlik fonksiyonları  ve  olmak üzere,



özelliğine sahip ise  veya  üzerinden yapılacak sonuç çıkarımlar aynıdır.