7.10. Çözümlü Problemler

**7.10.1** Örnek (7.5.2a) da verilen kitleden **** birimlik bir örneklem **** olsun.  nın tahmini için,  ve  tahmin edicileri önerilmiştir. Bu tahmin edicilerin yansızlık, yeterlilik, tutarlılık özelliklerini inceleyiniz. Her iki tahmin edicinin varyanslarını hesaplayıp karşılaştırınız.

*Çözüm:* Faktörizasyon teoreminden  tahmin edicisi  için yeterlidir.  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup beklenen değer ve varyansı

 

dir (Örnek 7.5.2a).  tahmin edicisi  için yansız olup varyansı  dir. Buradan,  yeterli, yansız ve



olduğundan  tahmin edicisi  için tutarlıdır (Teorem (7.5.1)). Diğer taraftan,





den



dir. Buradan,

 ve 

olur. Buna göre,  de  için yansız ve



olduğundan  de  için tutarlıdır (Teorem (7.5.1)). Bununla birlikte,  lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



olduğundan faktörizasyon teoremine göre,  tahmin edicisi  için yeterlidir. Buradan,  de  için yeterlidir. Ancak,  tahmin edicisi  için yeterli değildir. Ayrıca,



dir. Bunun nedeni,  tahmin edcicisinin yeterli olmasıdır. Ayrıca, gösterilebilir ki,  aynı zamanda tam olup, bütün yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahiptir.

**7.10.2 ** ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



olan kitleden bir örneklem olsun.

a)  rasgele değişkeninin beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

b)  koşullu beklenen değerini hesaplayınız.

c) **** örneklemine bağlı olarak  için yeterli bir tahmin edici bulunuz.

d) Bu yeterli tahmin ediciye bağlı olarak  nın yansız bir tahmin edicisini bulunuz.

e) Bu yansız tahmin edici  için tutarlı mıdır?

*Çözüm*: a) 

olduğundan  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklindedir. Buradan,  nin beklenen değeri



ikinci momenti de



olarak hesaplanmıştır. Rasgele değişkenin varyansı ise,



dır.

b)  rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu  için,



olup,  verildiğinde  nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu  için,



şeklindedir. Buradan,  verildiğinde  nin koşullu beklenen değeri



olarak bulunmuştur.

c)Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



için



şeklinde yazılabildiğinden,  tahmin edicisi  için yeterlidir.

d)  olup  ve  dir. Buradan,



olduğundan,  tahmin edicisi  için yansızdır.

e)  ile  arasındaki kovaryans için beklenen değeri,



olarak hesaplanmıştır. Ayrıca ,  ve  ise  ve  dür. Böylece  ile  arasındaki kovaryans



olup  nin varyansı



olarak bulunur. Buradan yansız tahmin edicinin varyansı da



dır.  tahmin edicisi yansız ve



olduğundan Teorem (7.5.1) e göre,  tahmin edicisi  için tutarlıdır.

**7.10.3**  beklenen değeri , varyansı  olan normal dağılımdan bir örneklem olsun.  olmak üzere  için,



tahmin edicisini yazalım.  tahmin edicisi  için yansız ve tutarlı mıdır?

*Çözüm:*  için  ler beklenen değeri , varyansı  olan normal dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerdir. Buna göre,  olup,



elde edilir. Ki-kare dağılımının özelliklerinden  nin beklenen değeri ile varyansı





olup,  iken  bulunur. Buna göre,  tahmin edicisi  için tutarlıdır (Teorem (7.5.1)).

**7.10.4**  beklenen değeri  olan Poisson dağılımından bir örneklem ve  olsun.  parametresinin tahmini için önerilen



tahmin edicinin yansız olduğunu gösteriniz ve varyansını hesaplayınız.

*Çözüm*: Poisson dağılımının beklenen değeri ve varyansı birbirine eşittir. Buna göre,  için  rasgele değişkenleri bağımsız ve ,  dır. Buradan da



bulunur. Buna göre,



olup ,  için yansızdır. Benzer şekilde,  rasgele değişkenleri bağımsız olup beklenen değerleri ve varyansları aynı olduğundan  nin varyansı

dir. Buradan,  için  değerinin hesaplanması gerekir. Bunun için



eşitliğinden  için  beklenen değerinin hesaplanması yeterlidir.  için  eşitliği kullanılarak, Poisson dağılımının ilk dört momenti,

, ,

 , 

olarak hesaplanmıştır. Ayrıca,  ve  aynı dağılımlı olduğundan  değeri



olarak bulunmuştur. Dolayısı ile,



olup  iken,



dır. Buna göre,  tahmin edicisi  için tutarlıdır.

**7.10.5**  olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olan kitleden bir örneklem olsun. Buna göre,

a)  için yeterli bir tahmin edici bulunuz.

b)  olmak üzere bütün  lar için  olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*:  lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak yazılabilir. Ayrıca,  için



olduğundan  tahmin edicisi  için yeterlidir.

b)  örneklem genişliği istatistiğinin dağılımını bulalım.  in dağılım fonksiyonu,  için,



olup  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  için,



eşitliğinden,



olarak yazılabilir.  ve  denirse ters dönüşümler,

 ve 

olup  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (Jacobien matrisinin determinantı  dir),



dir. Buradan,  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu da



integralinin değerinden



olarak elde edilir. Ayrıca,  nin beklenen değeri,



olup bütün  lar için,



elde edilir. Buradan,  için yeterli olan  nin öyle bir fonksiyonu vardır ki, beklenen değeri bütün  lar için sıfırdır. Buradaki beklenen değerin parametreye bağlı olmamasının nedeni,  istatistiğinin dağılımının parametreye bağlı olmamasıdır.

**7.10.6**  rasgele değişkenleri bağımsız,  ve  olsun.  parametresini tahmin etmek için,

 ve 

tahmin edicileri önerilmektedir. Bu tahmin edicilerin beklenen değerlerini ve varyanslarını hesaplayınız. Hangisinin varyansı daha küçüktür?

*Çözüm*: Önce beklenen değerleri hesaplayalım. Tahmin edicilerin beklenen değerleri,



 

olup her iki tahmin edici de  için yansızdır. Diğer taraftan varyanslar,



ve



şeklindedir.  ve  için Cauchy-Schwartz eşitsizliği



şeklinde yazılır. Buradan,  değerleri yerine konursa



elde edilir. Yani,  tahmin edicisi  tahmin edicisine göre daha etkindir.

**7.10.7**  beklenen değeri , varyansı  olan normal dağılımdan bir örneklem ve bu örneklemden bağımsız  de  dağılımından başka bir örneklem olsun.  nin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz. Bu tahmin edicinin beklenen değeri ile varyansını hesaplayınız.

*Çözüm*: ,  ve  nin olabilirlik fonksiyonu,





dir. Buradan, log-olabilirlik fonksiyonu,



şeklinde olup kısmi türevler,





şeklindedir. İlk iki türevin sıfıra eşitlenmesinden,

 

eşitlikleri elde edilir. Buradan,  ve  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri (ikinci türevlere de bakılarak)  ve  olarak elde edilmiştir. Bu çözümlerin üçüncü kısmi türevde yerine yazılıp sıfıra eşitlenmesi ile  nin en çok olabilirlik tahmin edicisi de,



olarak bulunmuştur. İkinci türevlere bakıldığında bulunan sonuçların maksimum olduğu görülür. Şimdi, bu tahmin edicinin beklenen değer ve varyansını hesaplayalım. Kolayca görüldüğü gibi  nin en çok olabilirlik tahmin edicisi basit aritmetik işlemlerden sonra,



olarak yazılır. Normal dağılımın özelliklerinden  olup varyanslar,



dir. Ayrıca, iki örneklem birbirinden bağımsız olduğundan  ve  de bağımsızdır. Dolayısı ile,  nin beklenen değeri



olur.  için tahmin edicinin beklenen değerinin  olduğu açıktır. Benzer şekilde,





dir.

**7.10.8**  olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden alınan bir örneklem olsun.  olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklinde verildiğinde,

a)  için yeterli bir tahmin edici bulunuz.

b)  nın en çok olabilirlik tahmin edicisini elde ediniz. Buna  diyelim.  ve  önceden belirlenmiş bir sayı () olsun.  ve olacak şekilde  ve  değerlerini belirleyiniz. Ayrıca,  ve  fonksiyonlarını öyle belirleyiniz ki,  olsun.

*Çözüm*: a) Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,  ve  için,



şeklinde yazılabidiğinden faktörizasyon teoremine göre, ,  için yeterlidir.

b) Benzer şekilde,  nın olabilirlik fonksiyonu,



olup, bu fonksiyon  ya göre azalandır.  fonksiyonu en yüksek değerine  noktasında ulaşır (Şekil (7.10.1)).



*Şekil 7.10.1 Düzgün dağılımın olabilirlik fonksiyonu*

Buna göre,  nın en çok olabilirlik tahmin edicisi  dir. Yeterli istatistik aynı zamanda en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Şimdi, bu yeterli istatistiğe bağlı yansız bir tahmin edici bulalım.

 nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,  için  olup beklenen değeri



olduğundan  tahmin edicisi  için yansızdır. Diğer taraftan,  nın olasılık yoğunluk fonksiyonu  için  dir. Buradan,  ve  değerleri



ve



şeklinde bulunur. Yani,  ve  için,  dır. Ayrıca



olduğundan,  ve  fonksiyonları

 ve 

olarak seçildiğinde,  dır.

**7.10.9**  olasılık yoğunluk fonksiyonu,  olan kitleden alınan bir örneklem olsun. 



olarak verildiğinde  için yeterli bir tahmin edici bulunuz. Bu yeterli tahmin ediciye  diyelim.  ye bağlı yansız bir tahmin edici bulunuz. Bu yansız tahmin ediciyi de  ile gösterelim. Bu tahmin edici tutarlı mıdır?

*Çözüm*:  lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak yazılabildiğinden faktörizasyon teoremine göre, ,  için yeterlidir. Bu tahmin edicinin beklenen değeri için  değerine ihtiyaç vardır. Bu beklenen değer,



olup  tahmin edicisi  için yansızdır. Ayrıca,



olduğundan,  rasgele değişkeninin varyansı,



olarak bulunmuştur. Buradan,  olup  yansız ve  olduğundan  tahmin edicisi  için tutarlıdır (Teorem (7.5.1)).

**7.10.10**  ler  dağılımından bir örneklem olsun.  olmak üzere,  için  ler ile  nin en çok olabilirlik tahmin edicilerini bulunuz.  nin en çok olabilirlik tahmin edicisi tutarlı mıdır?

*Çözüm*: Olabilirlik fonksiyonu,



olup log-olabilirlik fonksiyonu da



şeklindedir.  fonksiyonunda  sabit tutularak  lere göre kısmi türevlerinin sıfıra eşitlenmesi ile  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri (ikinci türevlere bakılmıştır),



olarak elde edilmiştir. Olabilirlik fonksiyonunda,  yazıldığında,

 

elde edilir. Bu fonksiyon biraz daha düzenlenerek,





şeklinde yazılabilir. Buradan, log-olabilirlik fonksiyonu,



şekline dönüşür. Bu fonksiyonunun  göre kısmi türevinin sıfıra eşitlenmesi ile  nin en çok olabilirlik tahmin edicisi de (ikinci türeve bakıldığı dikkate alınarak)



olarak bulunmuştur. Ayrıca,  denirse ( ler bağımsız)  ve  olduğundan,  dir. Zayıf büyük sayılar kanununa göre  iken,

 veya 

dir. Buradan,  nin en çok olabilirlik tahmin edicisinin ,  için tutarlı olmadığı görülür (yani olasılıkta  ye yakınsamaz). Ayrıca,  iken



dir.