8.4. En İyi Yansız Tahmin Ediciler

Bir önceki kısımda, bütün lineer yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyanslı lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) incelendi. Orada, bir lineer modelin parametrelerinin lineer birleşimi için en iyi lineer yansız tahmin ediciler ele alınmıştı. Bu kısımda, daha genel yansız tahmin ediciler ele alınacaktır. Bütün yansız tahmin ediciler arasında varsa en küçük varyanslı yansız tahmin edicilerin bulunma yöntemleri üzerinde durulacaktır.

 parametresi  olan kitleden bir örneklem olsun.  nın  gibi bir fonksiyonu için bütün yansız tahmin edicilerin (var olması halinde) sınıfını



ile gösterelim. Burada  parametre kümesini göstermektedir.  parametre kümesi genellikle reel sayıların bir alt kümesidir.

**Tanım 8.4.1** Her  için  olacak şekilde bir  varsa,  ya  için *düzgün en iyi yansız tahmin edici* (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator, UMVUE) denir

Böyle tahmin ediciler bulunamayabilir. Bazen bu tür tahmin edicileri bulmak zor olabilir. Bu kısımda, var olması halinde böyle tahmin edicilerin bulma yöntemleri üzerinde durulacaktır. Bilindiği gibi, bir parametre için bir çok yansız tahmin edici bulunabilir. Örneğin,  parametresi  olan Poisson dağılımından bir örneklem ise,  ve  nin her ikisi de  için yansız olup her  için  de  için yansızdır. Yani,  için sayılamayan çoklukta yansız tahmin edici vardır. Örnek (7.6.1b) den  olduğunu biliyoruz. Bu tür yansız tahmin ediciler arasında varsa en küçük varyanslı yansız tahmin ediciyi elde edebilmek için  minimizasyon probleminin çözülmesi gerekir. Aşağıdaki eşitsizlik yardımı ile bir tahmin edicinin varyansı için alt sınır bulunabilir. Dolayısı ile, eşitsizliğin geçerli olduğu durumlarda varyansı bu alt sınıra eşit olan yansız tahmin edici, en küçük varyanslı yansız tahmin edicidir (UMVUE).

**Teorem 8.4.1** (*Cramer-Rao Eşitsizliği*)  olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden bir örneklem (örneklemin bağımsız olma zorunluluğu yoktur) ve  da ,  ya göre türevlenebilir olacak şekilde  nın herhangi bir tahmin edicisi  olsun. Ayrıca,  olacak şekilde bir  fonksiyonu,



özelliğini sağlıyorsa,



dir.

*İspat*: Önce,







olduğu türev ile integralin yer değiştirebilmesi varsayımından açıktır. Buradan,





elde edilir. Diğer taraftan,



olduğundan



dir. Cauchy-Schwartz eşitsizliği ( ve  rasgele değişkenleri için Cauchy-Schwartz eşitsizliği )  ve  rasgele değişkenleri için



şeklinde yazılabilir. Bunun düzenlenmesi ile de aranan sonuç elde edilmiş olur

Cramer-Rao eşitsizliğinde örneklem bağımsız olmak zorunda değildir.  bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler ise,



olduğundan Cramer-Rao eşitsizliği,



şeklinde yazılabilir. Ayrıca,

olduğundan



dir. Diğer taraftan,



olup



elde edilir. Buna göre,  bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler ise Cramer-Rao eşitsizliği,



eklinde yazılabilir.

Bu eşitsizliğe göre, herhangi bir tahmin edicinin varyansı Cramer-Rao alt sınırından küçük olamaz. Buradan, herhangi bir yansız bir tahmin edicinin varyansı Cramer-Rao alt sınırına eşit oluyorsa, bu en küçük varyanslı yansız tahmin edicidir. Kısaca, Cramer-Rao eşitsizliğindeki  yerine  sağlanması halinde, bu eşitliği sağlayan  tahmin edicisi  için UMVUE dir.

**Örnek 8.4.1** a)  parametresi  olan Poisson dağılımından bir örneklem olsun.  ve  nin her ikisinin de  için yansız olduğunu biliyoruz. Ayrıca, her  için  de  için yansızdır.  nın başka yansız tahmin edicileri de bulunabilir. Bu yansız tahmin edicilerin içinde varsa en küçük varyanslı tahmin ediciyi bulmak isteyelim. Önce,  ve  olduğunu biliyoruz.  nin  ya göre türevi  olup, Cramer-Rao alt sınırının paydasındaki değeri hesaplayalım. Dağılımın olasılık fonksiyonu  yazılabilir. Kısmi türevler,

 ve 

olup ikinci kısmi türevin beklenen değeri,



dir. Buradan,  için Cramer-Rao eşitsizliği



şeklindedir. Yani,  yansız tahmin edicisinin varyansı Cramer-Rao alt sınırına ulaşmaktadır. Buna göre herhangi bir yansız tahmin edicinin varyansı  nin varyansından daha küçük olamaz. O halde,  örneklem ortalaması  için UMVUE dir.

b)  parametresi  olan Bernoulli dağılımından bir örneklem olsun.  olup  ye göre türevi  dir. Ayrıca,  olduğunu biliyoruz. Dağılımının olasılık fonksiyonu,  için  olup



den ikinci kısmi türev ile beklenen değeri



olarak hesaplanmıştır.  için Cramer-Rao eşitsizliği



şeklinde olup eşistsizlikdeki  yerine  için  sağlanır. O halde,  örneklem ortalaması  için UMVUE dir.

c)  parametresi  olan üstel dağılımdan bir örneklem olsun. Yine ,  nın UMVUE tahmin edicisidir.  ve  olup beklenen değerin  ya göre türevi  dir.  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu  için  olup eşitsizlikteki türevler

 ve 

şeklindedir. Buradan, Cramer-Rao eşitsizliğinin paydasındaki beklenen değer



şeklinde hesaplanmıştır. Buna göre, Cramer-Rao eşitsizliği  örneklem ortalaması için



şeklinde elde edilir. Yani,  nin varyansı Cramer-Rao alt sınırına ulaşır. Başka bir ifade ile, Cramer-Rao eşistsizliğinde  yerine  için  sağlanır. Buna göre,  örneklem ortalaması  nın UMVUE tahmin edicisidir

Cramer- Rao eşitsizliği bütün dağılımlar için geçerli değildir. Örneğin,  parametresi  olan düzgün dağılımdan bir örneklem ise  için UMVUE tahmin edicisini bulmak için Cramer-Rao eşitsizliği uygulanamaz. Bir an için uygulanabilir olduğunu düşünelim. O zaman,  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklinde olup olasılık yoğunluk fonksiyonunun  gibi yazıldığını düşünürsek (ki  şeklindedir)

 ve 

değerleri elde edilir. Ayrıca,  herhangi bir yansız tahmin edici olmak üzere,  olup birinci türevi  dir. Buna göre, bu yansız tahmin edici için,  olması gerekir. Oysa,  tahmin edicisi  için yansız olup varyansı için



eşitsizliği geçerlidir (Bkz. Örnek (8.4.2a)). Cramer-Rao eşitsizliğinin koşulları sağlanmış olsaydı,



olması beklenirdi. Oysa, ileride göreceğimiz gibi,  nın en küçük varyanslı yansız tahmin edicisi  dur. Burada, eşitsizliğin varsayımındaki türev ile integralin yer değiştirebilmesi koşulu sağlanmaz. Yani,



dir. Cramer-Rao eşitsizliğinin geçerli olmadığı durumlarda, UMVUE tahmin edicilerinin bulunabilmesi için aşağıdaki yöntem izlenebilir. Önce,  ve  gibi herhangi iki rasgele değişken için

 ve 

olduğunu hatırlayalım (Örnek (2.5.6)).

**Teorem 8.4.2** *(Rao-Blackwell Teoremi)*  parametresi  olan kitleden bir örneklem olsun. Ayrıca,  nın yansız bir tahmin edicisi  ve  de  için yeterli olsun. Bu durumda,  tahmin edicisi  için yansız olup, varyansı  tahmin edicisinin varyansından daha küçüktür. Yani,

 ve 

dir.

*İspat*:  yeterli olduğundan,  verildiğinde  lerin dağılımı  ya bağlı değildir. Dolayısı ile,  koşullu beklenen değeri de parametreye bağlı değildir. Bununla birlikte, koşullu beklenen değerin özelliklerinden



yazılır. Yani,  tahmin edicisi  için yansızdır.  olup



olduğundan  elde edilir

Bu teoreme göre  nın  gibi yeterli bir tahmin edici bulunduğunda (faktörizasyon teoremi),  yansız tahmin edicisinin varyansından daha küçük varyanslı (*daha iyi*) bir yansız tahmin edici bulunabilir. Ancak,  nın bütün yansız tahmin edicileri arasında varsa en küçük varyanslı yansız tahmin ediciyi (UMVUE) bulmak istiyoruz. UMVUE tahmin edicileri varsa tektir. UMVUE tahmin edicilerinin tekliğine ilişkin teorem aşağıda verilmiştir.

**Teorem 8.4.3** *(Lehmann-Scheffe Teklik Teoremi)* Herhangi bir  tahmin edicisi  için UMVUE ise tektir.

*İspat*: Tek olmadığını,  gibi başka bir UMVUE tahmin edicinin daha bulunduğunu kabul edelim. Bu durumda,  ve  olup,  de  için yansızdır. Ayrıca, Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden,



elde edilir.  ve  nin her ikisi de UMVUE (en küçük varyanslı yansız tahmin ediciler) olduğundan  olup  dir. UMVUE tahmin edicileri, bütün yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyanslı yansız tahmin edici olduğundan bu bir çelişkidir. Yani, UMVUE tahmin edicisinin varyansından daha küçük varyanslı yansız bir tahmin edici bulunamaz. Bu çelişkinin nedeni, başka bir UMVUE tahmin edicisinin var olduğu varsayımıdır. O halde, UMVUE tahmin edicisi varsa tektir

Rao-Blackwell teoremine göre,  nın yansız bir tahmin edici bulunduğunda, bu yansız tahmin edicinin varyansından daha küçük varyanslı başka bir yansız tahmin edici, bir yeterli tahmin edici yardımı ile bulunabilir.

**Teorem 8.4.4** Rao-Blackwell teoreminin koşulları altında,  yeterli tahmin edicisi aynı zamanda tam ise,  tahmin edicisi  için UMVUE dir.

*İspat*: Casella ve Berger, 2002, sayfa 347

**Örnek 8.4.2** a)  parametresi  olan düzgün dağılımdan bir örneklem olsun.  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu



şeklinde verildiğinde Cramer-Rao eşitsizliğinin koşulları sağlanmadığından  nın UMVUE tahmin edicisini bulamamıştık.  tahmin edicisi  için yeterli (Örnek 7.1.2c) ve tamdır (Örnek 7.4.2b). Diğer taraftan,  de  için yansız olup Teorem (8.4.4) gereğince (bundan sonra bu teorem Rao-Blackwell teoremi olarak anılacaktır),



 nın UMVUE tahmin edicisidir.

b)  parametresi  olan Bernoulli dağılımından bir örneklem olsun. Bernoulli dağılımının varyansının () UMVUE tahmin edicisini bulalım.

 tahmin edicisi  için yeterli (Örnek 7.1.2a) ve  olup üstel aile özelliğini sağladığından  tamdır (Örnek 7.4.2a). Yani ,  için yeterli ve tamdır. Diğer taraftan,  olup ,  için yansızdır. Rao-Blackwell teoremine göre, ,  için UMVUE dir. Şimdi bu koşullu beklenen değeri hesaplayalım.  Bernoulli dağılımına sahip olduğundan sadece  ve  değerlerini aldığı için  yazılabilir. Buna göre koşullu beklenen değer,







dir. Rao-Blackwell teoremine göre,  örneklem varyansı  nin UMVUE tahmin edicisidir.

Aynı örneklem için  nin UMVUE tahmin edicisini bulalım. Yine,  yeterli ve tamdır. Ayrıca,



tahmin edicisinin beklenen değeri,

olduğundan  tahmin edicisi  için yansızdır. Rao-Blackwell teoremine göre,



tahmin edicisi  nin UMVUE tahmin edicisidir

Rao-Blackwell teoremi sadece parametrenin kendisi için değil parametrenin bir fonksiyonu için de UMVUE tahmin edicisini bulmaya olanak sağlar. Örneklemin alındığı dağılımın olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanım kümesi parametreye bağlı (düzgün dağılımda olduğu gibi) veya parametrenin herhangi bir fonksiyonu için UMVUE tahmin edicileri bulunmak istendiğinde Rao-Blackwell teoremi kullanılabilir.

**Örnek 8.4.3** a) Belli bir saat dilimi içinde bir mağazaya giren müşterilerin sayısı  ortalamalı Poisson dağılımına sahiptir. Aynı saat dilimi içinde  farklı günde mağazaya giren müşterilerin sayıları  olsun. Yani,  dağılımından  birimlik bir örneklem  olsun.  lerin olasılık fonksiyonu,  için  olup Cramer-Rao eşitsizliğinden,  nın UMVUE tahmin edicisi  dir (Örnek (8.4.1a)). Şimdi, aynı saat dilimi içinde mağazaya hiç müşteri gelmemesi olasılığını tahmin etmek istayelim. Yani,  olasılığının UMVUE tahmin edicisini bulalım. ,  için yeterli ve tamdır (Örnek 7.4.1b).  nın yansız bir tahmin edicisi



olarak seçilebilir.  sadece  ve  değerlerini alan Bernoulli rasgele değişkeni olup



dir. Yani ,  için yansızdır. Rao-Blackwell teoremine göre,  tahmin edicisi  için UMVUE dir. Bu koşullu beklenen değerin hesabı için  olup olasılık fonksiyonu,  için  şeklindedir.  ile bağımsız olup, 

dir. Buradan, koşullu beklenen değer



şeklinde hesaplanmıştır. Buradan,  nın UMVUE tahmin edicisi



olarak hesaplanmıştır. Bu tahmin edici,  örneklem hacmi yeterince büyük ise biraz daha düzenlenebilir.  yeterince büyük ise  olup,  nın UMVUE tahmin edicisi için



yaklaşımı kullanılabilir.  nın UMVUE tahmin edicisi  olduğundan (Örnek (8.4.1a))  örneklem hacmi yeterince büyük ise  nın UMVUE tahmin edicisi de yaklaşık olarak  dir.

Bir mağazanın sabah açılış saatini belirlemek için mağaza sahibi değişik günlerde sabah saat 8:00 ile 9:00 arası işyerine gelen müşterilerin sayısı

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 |

şeklinde gözlenmiştir. Mağaza sahibi sabah saat 8:00 ile 9:00 arası hiç müşteri gelmemesi olasılığını tahmin elmek istiyor. Mağazaya gelen müşterilerin sayısı ortalaması  olan Poisson sağılımına sahip ise,  nın UMVUE (en küçük varyanslı yazsız tahmin edicisi  olup, tahmin değeri  dür. Hiç müşteri gelmemesi olasılığının en küçük varyanslı yazsız tahmin edicisi ise  olup tahmin değeri yaklaşık  dur. Ayrıca,  dır. Önemlem hacmi büyüdükçe aradaki fark azalır.

b) Aynı örneklem dikkate alınarak bu defa  nın UMVUE tahmin edicisini bulalım.  yine  için yeterli ve tamdır. Bu defa,  nın yansız tahmin edicisi olarak



seçilebilir.  sadece  ve  değerlerini alan Bernoulli rasgele değişkeni olup beklenen değeri



dır. Yani,  tahmin edicisi  için yansızdır. Koşullu beklenen değer,





olarak hesaplanmıştır. Buradan  nın UMVUE tahmin edicisi de,



olarak bulunur. Benzer şekilde  örneklem hacmi yeterince büyükse,



olup  nın UMVUE tahmin edicisi  ise  nın UMVUE tahmin edicisi de yaklaşıkm olarak  dir. Aynı verilere göre mağazaya sabah 8:00 ile 9:00 arası bir müşteri gelmesi olasılığının tahmin değeri yaklaşık olarak  dir

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi, herhangi bir  parametresinin UMVUE tahmin edicisi  ise  da yaklaşık olarak  nın UMVUE tahmin edicisidir. Bu genellikle doğru olmayabilir. Bu özellik en çok olabilirlik tahmin edicilerinde her zaman geçerli olmasına rağmen özel durumlarda UMVUE tahmin edicilerinde yaklaşık olarak geçerlidir. Örneğin,  parametresi  olan Poisson dağılımından bir örneklem ise,  nın UMVUE tahmin edicisi  dir. Ayrıca,  nin UMVUE tahmin edicisi için,  olmak üzere,  olup  istatistiği  için yansızdır.  yeterli ve tam olduğundan (bir önceki örnekte gösterildi) Rao-Blackwell teoremine göre



 nin UMVUE tahmin edicisidir. Bu tahmin edici,



olarak yazılabilir. Yani,  nın UMVUE tahnin edicisi  olup  nin UMVUE tahmin edicisi  değildir. Bununla birlikte,  olduğundan  örneklem hacmi yeterince büyükse  dir.

8.5. Asimptotik Özellikler

Önceki bölümlerde, tahmin edicilerin asimptotik özelliklerinden biraz bahsedilmişti. İstatistiki sonuç çıkarımlar için tahmin edicilerin dağılımları önemlidir. Tahmin edicilerin gerçek dağılımları genellikle bulunamadığı için asimptotik dağılımlardan yararlanılır. Birçok UMVUE tahmin edicisi, yansız en küçük varyanslı tahmin ediciler olmasına rağmen, dağılımları bilinmediği için herhangi bir istatistiki sonuç çıkarım için kullanılamaz. Tahmin edicilerin asimptotik normalliği Kısım (7.8) de incelenmişti. Bu kısımda ise, istatistiklerinin asimptotik özellikleri kısaca özetlenecektir. Birçok durumda, istatistiği örneklem ortalaması olarak karşımıza çıkar. Merkezi limit teoreminin koşulları sağlandığında istatistiği de asimptotik normaldir. istatistiği örneklem ortalamasının bir fonksiyonu ise, Taylor serisi yaklaşımları ile asimptotik dağılım elde edilir. Örneğin,  parametresi  olan Poisson dağılımından bir örneklem ise  nın UMVUE tahmin edicisinin (yansız bir tahmin edici olduğundan bu da bir istatistiğidir), yaklaşık olarak  olduğunu biliyoruz (Örnek (8.4.3a). Poisson dağılımının beklenen değer ve varyansı birbirine eşit olduğundan

 ve 

olup asimptotik dağılım  için  şeklinde yazılır.  fonksiyonunun birinci dereceden Taylor serisi açılımı ile,  nin asimptotik dağılımı da,



şeklinde elde edilir. Buradan,  olmak üzere,  ve  olup asimptotik dağılım,  dir.

Şimdi, istatistiklerininin genel halini göz önüne alalım.  dağılım fonksiyonu  ( parametreli) olan kitleden bir örneklem ise  nın istatistiği  çekirdek fonksiyonu ile



şeklinde yazılmıştı. Ayrıca,

 ve 

olup,  için  dır. Buradan,  ve  için,



olmak üzere, istatistiğinin varyansının da



formülü ile hesaplandığını belirtmiştik. Buradan, istatistiğinin asimptotik dağlımı  nin değerine göre değişir. Bu asimptotik dağılımlar Serfling (1980, Kısım 5.5, sayfa 192) de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

**Teorem 8.5.1** Eğer  ve  ise  iken,



dir

**Örnek 8.5.1**  dağılım fonksiyonu , beklenen değeri , varyansı da  olan kitleden bir örneklem olsun.  için  çekirdek fonksiyonu ile istatistiği



olarak elde edilmişti (Örnek 8.1.1c). Ayrıca  ve  değerlerini  ve  olarak hesaplamıştık (Örnek (8.1.2)).  (yani, ) olduğu varsayımı altında  iken  nin asimptotik dağılımı



olarak yazılır. Buradan,  dir.  başarı olasılığı  olan Bernoulli dağılımından bir örneklem ise,  için  dır. Buna göre,  olması için gerek ve yeter koşul  olmalıdır. Yani,  için yukarıdaki asimptotik dağılım geçerli değildir

 ise yukarıdaki asimptotik dağılım geçerli değildir. Örneğin, başarı olasılığı  olan Bernoulli dağılımından bir örneklem için  dır.  ise her  için  ve  olup dördüncü merkezi moment



dir. Buradan da,  olduğu görülür.  ise  olup  olur.  nin istatistiğinin  olduğunu biliyoruz. Bu istatistiğinin asimptotik dağılımı (Bkz. Serfling, 1980, sayfa 195)  iken



dir.

Aşağıdaki teorem tahmin edicilerin fonksiyonlarının asimptotik dağılımlarını bulmak için kullanılmaktadır (Serfling 1980, sayfa 119).

**Teorem 8.5.2**  rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi ve  iken  olmak üzere  olsun. Reel değerli bir  fonksiyonunun  noktasında  için  dereceden türevleri mevcut,  için  ve  ise  iken



dir

**Örnek 8.5.2**  beklenen değeri , varyansı  olan kitleden bir örneklem olsun. Merkezi limit teoremine göre,  olup  istatistiğinin asimptotik dağılımı  nün durumuna göre değişir. Örneğin,  için  alındığında,  ve  olup

i)  için 

ii)  için  iken 

dir

8.6. Çözümlü Problemler

**8.6.1**  beklenen değeri  olan Üstel dağılımdan bir örneklem olsun.  nin UMVUE tahmin edicisini bulunuz. Bu tahmin edicinin asimptotik dağılımını elde ediniz.

*Çözüm*: ,  için yeterli ve tamdır (Örnek 7.4.2).  nın yansız bir tahmin edici



eşitliğinden  olarak seçilebilir. Rao-Blackwell teoremine göre,



 nin UMVUE tahmin edicisidir  ler bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olup merkezi limit teoreminin koşulları sağlanır.  ve  olmak üzere,  dir.  denirse,  olup,  iken



dir. Ayrıca,  iken  olup asimptotik dağılım,



olarak elde edilir.

**8.6.2**  beklenen değeri  varyansı  olan kitleden bir örneklem olsun.  için iatatistiği  olarak verilmişti (Örnek (8.1.1b)). Bu tahmin edicinin varyansının



olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*: istatistiği için  çekirdek fonksiyonu kullanılmıştı. Buradan,  ve  değerleri için

 ve 

olup,  ve  dir. Buna göre  değeri,



olarak hesaplanmış olur. Benzer şekilde,  değeri de,



dir. Buradan, istatistiğinin varyansı,



şeklinde hesaplanmış olur.

**8.6.3**  iki boyutlu bağımsız rasgele vektörler (örneklem) olsun.

, ,  ve 

olmak üzere,  için istatistiğinin varyansını hesaplayınız.

*Çözüm*:  için  çekirdek fonksiyonu ile istatististiği,











şeklinde bulunur. Ayrıca,



olup  için  ve  değerlerini hesaplayalım. Bunun için



olmak üzere,



ve



fonksiyonlarını yazalım. Buradan  değeri,



olarak bulunmuş olur.

Şimdi de  değerini hesaplayalım.  ile  ve  ile  bağımsız,  ile  ve  ile  de bağımsızdır. Parantez karesi alındığında bazı terimler sıfır olup  değeri,



olarak hesaplanmıştır. Bu iki değer istatistiğinin varyansının formülünde yerine konursa



 

elde edilir.

**8.6.4**  olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden bir örneklem olsun.  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu



olmak üzere,  nın UMVUE tahmin edicisini ve bu tahmin edicinin varyansını hesaplayınız.

*Çözüm*:  istatistiği  için yeterli ve tamdır (Örnek (7.4.2b)).  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup beklenen değeri



dir. O halde,  tahmin edicisi  için yansızdır. Rao-Blackwell teoremine göre,



 nın UMVUE tahmin edicisidir. Bu tahmin edicinin birinci momenti yukarıda hesaplandı. Tahmin edicinin varyansı için ikinci moment,



olup UMVUE tahmin edicisinin varyansı



olarak bulunmuştur.

**8.6.5**  olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden bir örneklem olsun.



olmak üzere,  nın UMVUE tahmin edicisini ve bu tahmin edicinin varyansını hesaplayıp Cramer-Rao alt sınırı ile karşılaştırınız.

*Çözüm*: Faktörizasyon teoreminden, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



şeklinde yazılabildiği için  tahmin edicisi  için yeterlidir. Yeterli istatistiğin her birebir fonksiyonu da yeterli olduğundan



de  için yeterlidir.  diyelim ve  nin dağılım fonksiyonunu bulalım.  olup dağılım fonksiyonu  için  ve  için,



dır. Buradan  lerin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırası ile,

 

şeklindedir. Yani,  ler beklenen değeri  olan üstel dağılımlı rasgele değişkenlerdir. Buradan,  nin dağılımı da



dır. Gamma dağılımlar ailesi üstel olup tamdır. Yani ,  için yeterli ve tamdır.

Şimdi, bu yeterli tahmin ediciye bağlı  nın yansız bir tahmin edicisini bulalım.  olduğundan olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup  nin beklenen değeri



olarak hesaplanmıştır. Buna göre,  tahmin edicisi  için yansızdır. Rao-Blackwell teoremine göre,



 nın UMVUE tahmin edicisidir.

Bu tahmin edicinin varyansı için,  nin ikinci momenti



olarak hesaplanmıştır. Buradan UMVUE tahmin edicisinin varyansı



olarak bulunmuştur.

 lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,  olarak verilmişti. Cramer-Rao eşitsizliği için olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritması ve gerekli türevler,

 

şeklindedir.  nın herhangi bir  yansız tahmin edicisi için Cramer-Rao eşitsizliği,



şeklinde olup  dir. Yukarıda elde edilen UMVUE tahmin edicisi aynı zamanda yansız bir tahmin edicidir. Buna göre,



bulunur. Yani, UMVUE tahmin edicisinin varyansı Cramer-Rao alt sınırını aşmaktadır.

**8.6.6**  parametresi  olan düzgün dağılımdan bir örneklem olsun.  nın UMVUE tahmin edicisi  dir (Örnek (8.4.2a).  nın başka bir yansız tahmin edicisi de  dir (Örnek 7.7.1a). Buna göre  olmak üzere,

 ve 

olasılıklarını hesaplayarak karşılaştırınız.

*Çözüm*:  ve  nin dağılım fonksiyonları  için  ve  dir. Bu olasılıklar dağılım fonksiyonları yardımı ile,





ve



şeklinde hesaplanmıştır. Olasılıklar arasındaki fark



negatif olduğundan  dir.

**8.6.7**  olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden bir örneklem olsun.  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu



olmak üzere,

a)  nin  için yansız olduğunu gösteriniz

b)  nin varyansını hesaplayınız. Cramer-Rao alt sınırını inceleyiniz.

c)  nın UMVUE tahmin edicisini bulup varyansını  tahmin edicisinin varyansı ile karşılaştırınız. Cramer-Rao alt sınırını inceleyiniz.

*Çözüm*: a)  lerin beklenen değeri,



olup  olduğundan  tahmin edicisi  için yansızdır.

b)  lerin ikinci momenti,



olup varyansı



dir. Buradan,  nin varyansı da



olur. Cramer-Rao alt sınırının hesaplamayalım. Aslında, Cramer-Rao teoreminin koşulları burada geçerli değildir. Bir an için geçerli olduğunu düşünelim. Bu durumda,  için  ve  olur. Diğer taraftan, olasılık yoğunluk fonksiyonu  gibi ele alınırsa,

 ve 

olduğundan Cramer-Rao alt sınırı, herhangi bir  yansız tahmin edici için



olur. Oysa,



dır. Bu ise bir çelişki olup çelişkinin nedeni Cramer-Rao teoreminin koşullarının bu örnekte geçerli olmamasıdır.

c)  nın UMVUE tahmin edicisini bulalım. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu



şeklinde yazılabildiği için  faktörizasyon teoremine göre  için yeterlidir. Ayrıca,  tam olup olasılık yoğunluk fonksiyonu  için  şeklindedir.  nin tamlığını göstermek için  olacak şekilde herhangi bir  fonksiyonu belirlensin. Bu durumda,



yazılır. Buradan da, Örnek (7.4.2b) de olduğu gibi türev alındığında, bütün  lar için  olduğu görülür. Yani,  istatistiği  için yeterli ve tamdır. Şimdi,  ye bağlı  nın yansız bir tahmin edicini bulalım.  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak,  beklenen değeri



olup,  tahmin edicisi  için yansızdır. Rao-Blackwell teoremine göre,



olup ,  nın UMVUE tahmin edcicisidir. Şimdi, bu tahmin edicinin varyansını hesaplayalım. Önce,  olup ikinci momenti



olarak hesaplanmıştır. Buradan  nin varyansı da



olarak bulunur. UMVUE tahmin edicisinin varyansı ise



dir. Kolayca görüleceği gibi,



ve Cramer-Rao alt sınırı doğru olmuş olsa bile



dir.

**8.6.8**  beklenen değeri  olan üstel dağılımdan bir örneklem olsun. Buna göre,

a)  nın en çok olabilirlik ve UMVUE tahmin edicilerini bulunuz.

b) Bu tahmin edicilerin varyanslarını Cramer-Rao alt sınırı ile karşılaştırınız.

*Çözüm*: a)  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup  nın log-olabilirlik fonksiyonu ve türevi



şeklindedir. Birinci türevin sıfıra eşitlenmesi ile  bulunur. İkinci türev bu noktada negatif olup  nın en çok olabilirlik tahmin edicisi  dir.

Diğer taraftan,  lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklinde olup üstel aile özelliğini sağladığından ,  için yeterli ve tamdır. Ayrıca,  olup,



olduğundan  tahmin edcicisi  için yansızdır. Rao-Blackwell teoremine göre



 nın UMVUE tahmin edicisidir.

b) 

olduğundan  nin varyansı



olur. Buna göre tahmin edicilerin varyansları,





şeklindedir. Şimdi de Cramer-Rao alt sınırını hesaplayalım. Herhangi bir  yansız tahmin edicisi için,  dir. Ayrıca,

 ve 

olup Cramer-Rao eşitsizliğinden,  dir. Buna göre,





olduğu görülür. Ayrıca,



olduğundan  dir

**8.6.9**  ler ile  ler arasında,  şeklinde bir ilişkisinin var olduğunu düşünelim. Burada,  ler beklenen değeri sıfır varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenler,  ler de bilinen (rasgele olmayan) değişkenlerdir.  nın tahmini için önerilen

,  ve 

tahmin edicileri  için yansız olup,  dır (Problem 4.3.8). Bu tahmin edicilerin hepsi  lerin bir lineer birleşimidir.  nın  şeklindeki bütün lineer yansız tahmin edicileri için,  olduğunu gösteriniz.

*Çözüm*:  nın en az bir lineer yansız tahmin edici vardır (Tanım (8.3.2)). Dolayısı ile  tahminlenebilirdir. Teorem (8.3.4) gereğince,  ve  olmak üzere  nın en küçük varyanslı lineer yansız tahmin edicisi (BLUE)



dir. Yani,  şeklindeki herhangi bir lineer yanssız tahmin edici için  dir.

**8.6.10**  olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden bir örneklem olsun.  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olmak üzere,  nın UMVUE tahmin edicisini bulunuz. Bu tahmin edicinin varyansını Cramer-Rao alt sınırı ile karşılaştırınız.

*Çözüm*:  lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup, faktörizasyon teoremine göre, ,  için yeterlidir. Yeterli istatistiğin her bire bir fonksiyonu da  için yeterli olduğundan,



de  için yeterlidir. Ayrıca,  tahmin edicisi de  için yeterlidir.  nin dağılımı için önce,  nin dağılımını bulalım.  olup,  için  ve  için,



dir. Yani  nin dağılım fonksiyonu ile olasılık yoğunluk fonksiyonu,

 , 

şeklindedir. Buradan,  olup sonuç Problem (8.6.7) de elde edilmiştir.