9.5. En Güçlü Testler

Bir hipotez testi probleminde, hata olasılıklarının küçük olması arzu edilir. Birinci tür hata olasılığı sabit tutularak ikinci tür hata olasılığı en küçük (gücü en fazla) olacak şekilde test kuralları geliştirilmeye çalışılır. Bazı testler, birinci tür hata olasılıklarını kontrol altında tutar (örneğin, düzeyli testlerin birinci tür hata olasılığı en fazla  kadardır). Ancak, iyi bir test için ikinci tür hata olasılığının da küçük (testin gücünün de fazla) olması beklenir. Herhangi iki test, *Test I* ve *Test II* olsun. Eğer *Test I* in ikinci tür hata olasılığı *Test II* nin ikinci tür hata olasılığından daha küçük ise *Test I* tercih edilir. Kısaca, birinci tür hata olasılığı sabit tutulduğunda ikinci tür hata olasılığı küçük olan test daha iyidir. Birinci tür hata olasılığı sabit tutulduğunda ikinci tür hata olasılığı en küçük olan bir test varsa böyle bir test en iyi testtir. Bu kısımda bu tür testler ele alınacaktır.

**Tanım 9.5.1**  hipotezinin  alternatif hipotezine karşı testi problemi için bütün düzeyli testlerin sınıfı  olsun.  sınıfı içinde güç fonksiyonu  olan bir  testi güç fonksiyonu  olan her  ve  için



oluyorsa,  testine *düzgün en güçlü* (uniformly most powerful, *UMP*) *test* denir

**Tanım 9.5.2**  güç fonksiyonu  olan bir test olmak üzere,



ise,  test fonksiyonuna *yansızdır* denir

Tanımdaki koşul o kadar ağırdır ki, bir çok hipotez testi problemi için düzgün en güçlü test bulunamaz. Ayrıca, birinci tür hata olasılığı dikkate alınmadan ikinci tür hata olasılığını en küçük yapmak o kadar önemli değildir. Örneğin, bir test  hipotezini  olasılıkla red ederse, bu test için ikinci tür hata olasılığından bahsedilemez.

Aşağıdaki teorem, ölçekli düzgün en güçlü testlerin bulunması için önemlidir. Bu teorem, parametre uzayının sadece iki elemandan oluştuğu varsayımına dayanır. Bilindiği gibi, parametre kümesinde sadece bir eleman bulunan hipotezler basit, birden fazla eleman bulunan hipotezler de karmaşık hipotezlerdir. Yani, teorem basit hipotezlerin basit hipotezlere karşı test edilmesi problemleri için geçerlidir.  ise  hipotezinin  alternatif hipotezine karşı test edilmesi problemi için düzgün en güçlü test aşağıdaki teorem yardımı ile bulunabilir.

**Teorem 9.5.1** (*Neyman-Pearson Lemması*) olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  için  olan kitleden bir örneklem olsun.  yokluk hipotezinin  alternatif hipotezine karşı testi problemi için önerilen

|  |  |
| --- | --- |
|  | ( örneklem hacmi yeterince büyük olduğunda test şeklinde ifade edilir). |

bir test için  ve  sabitleri ()  olacak şekilde belirlendiğinde, bu test bütün düzeyli testler arasında en güçlüdür

Teoremin ispatı bir çok istatistik teorisi kitabında bulunabilir (Öztürk, Akdi, Aydoğdu ve Karabulut (2006), sayfa 190 veya biraz değişik bir ifade ile Casella ve Berger (2002), sayfa 388). Bu kısımda, bu teoremin uygulamaları üzerinde durulacaktır. Ayrıca,  nın yeterli bir  tahmin edicisi için Neyman-Pearson Lemması’nın uygulaması daha kolaydır.

 parametresi  olan kitleden bir örneklem,  de  için yeterli ve  nin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  için  olsun. Bu durumda, Neyman-Pearson lemması  nin değerine göre yazılabilir. Neyman-Pearson lemmasındaki  test fonksiyonu için  olup bu test yansızdır.

**Örnek 9.5.1**  dağılımından bir örneklem  olsun.  olmak üzere,  hipotezini  alternatif hipotezine karşı test etmek isteyelim. Burada, parametre uzayı  gibi iki elemandan oluşan bir kümedir.  örneklem ortalaması  için yeterli olup dağılımı  dir.  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu da,



şeklindedir. Herhangi bir pozitif  sayısı () için  ise,  dir. Buradan,  ise  olduğu



önermelerinin denkliğinden açıktır. Yani,  ise herhangi bir  sayısı için  dir. Burada, önceden belirlenen bir  sayısı (birinci tür hata olasılığı, testin anlam düzeyi) için,



eşitliği yazılır. Buna göre,  için  dır.  olup, normal dağılım tablosundan  olarak bulunur. Dolayısı ile, bu problem için red bölgesi  olan bir test UMP düzeyli testtir

Aynı problemde, önceden belirlenen bir  sayısı için hipotezler  ve  olarak alınmış olsaydı, test kuralı aynı olacaktı. Ancak, elde edilen testin UMP düzeyli olduğunu söyleyemezdik. Neyman-Pearson lemması basit hipotezlerin basit hipotezlere karşı testi probleminde UMP düzeyli testlerin bulunmasında kullanılır. Burada, karmaşık hipotezlerin karmaşık hipotezlere karşı testi söz konusudur. Karmaşık hipotezler için bazı özel durumlarda UMP düzeyli testler bulunabilir.

**Tanım 9.5.3** (*Monoton Olabilirlik Oranı*)  rasgele değişkeninin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ailesi  olsun. Eğer  için  oranı  nin azalmayan bir fonksiyonu ise  sınıfına *monoton olabilirlik oranı* (MLR) özelliğine sahiptir denir

Bu oran,  kümesi üzerinde tanımlı olup,  için ,  olarak alınır. Bilinen bir çok olasılık dağılımlarının ailesi MLR özelliğine sahiptir. Aslında, üstel aile özelliğine sahip olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ailesi MLR özelliğine de sahiptir.



şeklinde üstel aile özelliğine sahip olasılık fonksiyonlarının ailesinde ,  nın azalmayan bir fonksiyonu ise MLR özelliğine sahiptir. ,  nın azalmayan bir fonksiyonu ise  için  dır. Ayrıca,



olup,  ve  olduğundan  oranı her zaman  nin azalmayan bir fonksiyonudur. Yani, ,  nın azalmayan bir fonksiyonu ise üstel aile özelliğine sahip olasılık fonksiyonlarının ailesi MLR özelliğine de sahiptir.

**Örnek 9.5.2** a) Poission dağılımlar ailesini göz önüne alalım. Poisson dağılımının olasılık fonksiyonu  için  olup  için



şeklinde yazılır. Buradan,  için bu oran  in azalmayan bir fonksiyonudur. Yani, Poisson dağılımlar ailesi MLR özelliğine sahiptir.

b)  ise  için



olup  olduğundan olasılık yoğunluk fonksiyonlarının oranı,  in azalmayan bir fonksiyonudur. Dolayısı ile,  dağılımlar ailesi de MLR özelliğine sahiptir.

c) Binom dağılımlar ailesi de MLR özelliğine sahiptir. Çünkü  için olasılık fonksiyonlarının oranı



olarak yazılabilir. Burada,  olduğundan  dir. Dolayısı ile olasılık fonksiyonlarının  oranı  in azalmayan bir fonksiyonudur

Basit hipotezlerin basit hipotezlere karşı testi için UMP düzeyli testler Neyman-Pearson lemması ile bulunabilir. Olasılık fonksiyonlarının ailesi MLR özelliğine sahip ise karmaşık hipotezler için de UMP düzeyli testler aşağıdaki teorem yardımı ile bulunur. Bu teoremin ispatı da bir çok istatistik teorisi kitabında bulunabilir (Öztürk, Akdi, Aydoğdu ve Karabulut (2006), sayfa 209 veya biraz değişik bir ifade ile Casella ve Berger (2002), sayfa 391). Teoremin ifadesi aşağıda verilmiştir.

**Teorem 9.5.2**  olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden bir örneklem ve  de  için yeterli olsun.  nin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ailesi,  MLR özelliğine sahip ise,  yokluk hipotezinin  alternatif hipotezine karşı testi problemi için



gibi bir test fonksiyonundaki  ( ve  sabitleri



olacak şekilde belirlendiğinde  testi UMP düzeyli testtir

**Örnek 9.5.3** a)  dağılımından bir örneklem  olsun. Önceden belirlenen bir  sayısı için  hipotezini  alternatif hipotezine karşı test etmek isteyelim.  örneklem ortalaması  için yeterli olup dağılımı normaldir. Yani,  olup normal dağılımlar ailesi üstel ve tamdır. Ayrıca, normal dağılımlar ailesi MLR özelliğine sahiptir (Örnek (9.5.2b)). Buradan Teorem (9.5.2) ye göre,



şeklindeki bir test düzeyli düzgün en güçlü testtir. Burada,  olmak üzere,



eşitliğinden  sabitinin değeri  olacak şekilde normal dağılım tablosundan belirlenir. Yani,  olup  dir. Buradan bu hipotez testi problemi için,



veya buna denk olan



şeklindeki bir test düzeyli düzgün en güçlü testtir.

b)  parametresi  olan Bernoulli dağılımından bir örneklem olsun. Önceden belirlenen bir  sayısı için   hipotezinin  alternatif hipotezine karşı testi problemini ele alalım.  istatistiği  için yeterli olup dağılımı  dir. Ayrıca, Binom dağılımlar ailesinin MLR özelliğine sahiptir (Örnek (9.5.2)). Buna göre, önceden belirlenen bir  sayısı (testin anlam düzeyi veya birinci tür hata olasılığı) için,



şeklindeki bir test düzeyli düzgün en güçlü testtir. Buradaki,  ve  sabitleri,



eşitliği ile belirlenir.

c)  beklenen değeri  olan üstel dağılımdan bir örneklem olsun. Önceden belirlenen bir  sayısı için  hipotezinin  alternatif hipotezine karşı testi problemini ele alalım.  istatistiği  için yeterli ve tam olup dağılımı  dır. Bu dağılımlar ailesi de üstel olup MLR özelliğine sahiptir. Dolayısı ile, bu hipotez testi problemi için  düzeyli düzgün en güçlü test,



şeklindedir. Yani,  hipotezinin  alternatif hipotezinin testi problemi için düzeyli düzgün en güçlü test,



dir. Burada,  sabitinin değeri önceden belirlenen bir  sayısı (birinci tür hata olasılığı veya testin anlam düzeyi) ile belirlenir

Bir çok hipotez testi problemi için düzgün en güçlü test yoktur.

**Örnek 9.5.4**  dağılımından bir örneklem  olsun. Önceden belirlenen bir  sayısı için  hipotezinin  alternatif hipotezine karşı testi problemini ele alalım.

Bu problem için düzgün en güçlü test bulunamaz. Bir an için düzgün en güçlü testin bulunduğunu varsayalım.  olacak şekilde  belirlendiğinde, önceden belirlenen bir  sayısı (birinci tür hata olasılığı vaya testin anlam düzeyi) için,



testi  noktasında en yüksek güce sahiptir. Yani, düzgün en güçlü test varsa bu  olacaktır. Ayrıca,



testi verilmiş olsun. Bu test de düzeylidir. Şimdi,  olacak şekilde bir  noktası belirleyelim.  ve  bu testlerin sırası ile güç fonksiyonlarını göstersin. Buradan, bu iki testin güç fonksiyonları arasında





şeklinde bir karşılaştırma yapılabilir. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü, böyle bir hipotez testi problemi için düzgün en güçlü test varsa bunun  olması gerektiğini söyledik. Oysa, aynı noktada gücü  in gücünden daha fazla olan bir  testi bulundu (). O halde böyle bir problem için düzgün en güçlü test bulunamaz

Testin gücü ve kritik değeri birinci tür hata olasılığına bağlıdır.

 **Örnek 9.5.5**  başarı olasılığı  olan Bernoulli dağılımından bir örneklem olsun.  hipotezini  alternatif hipotezine karşı test edelim. ,  için yeterli olup dağılımı  dir.  örneklem hacmi yeterince büyükse, düzeyli düzgün en güçlü test, Neyman-Pearson lemmasına göre,



dir. Burada,  oranı  nin azalan bir fonksiyonu olup  nin küçük değerleri için  hipotezi red edilir. Yani, düzeyli düzgün en güçlü test



şeklindedir.  ve  anlam düzeyleri verilmiş olsun.  için,



olduğundan,  anlam düzeyli düzgün en güçlü test



şeklinde olur. Ayrıca,  için,



olduğundan  anlam düzeyli düzgün en güçlü test de



dir. Buna göre,

 , 

şeklinde verilen testlerin güç fonksiyonları sırası ile





şeklindedir. Açıkça görüldüğü gibi  dir

9.6. Güven Aralıkları

 parametresi  olan kitleden bir örneklem ise,  yı tahmin etmek için örneklemin bir fonksiyonu olan  rasgele değişkeni kullanıldı.  nin değerine de  nın bir tahmini demiştik.  parametre kümesini göstermek üzere  nin değeri parametre kümesinde bir noktadır ().

Güven aralıkları ile hipotez testleri arasında yakın bir ilişki vardır.  beklenen değeri , varyansı  olan normal dağılımdan bir örneklem olsun.  hipotezinin  alternatifine karşı  anlam düzeyinde testi için test kuralının “ olmak üzere,  ise  hipotezi red edilir” şeklinde olduğunu biliyoruz.



*Şekil 9.6.1 Güven aralığı ile çift yölü hipotez testi arasındaki ilişki*

Yani,  ise  red edilemez. Burada,  nin değeri yerine konulduğunda

 

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir. Şekil (9.6.1) de görüldüğü gibi  değeri taralı alan içinde ( veya ) kalıyorsa  red edilir. Buna göre, aralığın  parametresini içermesi olasılığı  dır. Böylece,  için  lık güven aralığı,



şeklinde yazılabilir.

**Tanım 9.6.1**  olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu  olan kitleden bir örneklem olsun.  eşitsizliğini sağlayan  rasgele aralığına  için bir *aralık tahmin edicisi* denir

Tanımdaki kapalı aralık yerine  gibi tek taraflı aralık tahmin ediciler (Öztürk ve diğerleri, 2006, sayda 252) de kullanılabilir.

**Tanım 9.6.2**  parametresinin  gibi bir aralık tahmin edicisi için  olasılığına tahmin edicinin *örtme olasılığı,*



sayısına da bu tahmin edicinin *güven katsayısı* denir

Bir aralık tahmin edicisi, güven katsayısı ile birlikte *güven aralığı* olarak isimlendirilir. Alışılagelmiş olarak güven katsayısı değeri  gibi bir olasılıkla ifade edilir.  güven katsayılı bir güven aralığı için,  dır.  nın  güven katsayılı bir güven aralığı  olmak üzere,



ise bu güven aralığına *dengeli-kuyruklu* (equally tailed) güven aralığı denir.

**Örnek 9.6.1**  beklenen değeri , varyansı  olan normal dağılımdan bir örneklem olsun. ,  için arzu edilen birçok istatistiki özelliği sağlar.  için  olmak üzere  gibi bir güven aralığını ele alalım. Bu durumda örtme olasılığı,



şeklindedir. Bu örtme olasılığı parametreye bağlı değildir. Dolayısı ile,



dir. Bazı durumlarda, örtme olasılığı parametreye bağlı olabilir (Öztürk ve diğerleri, 2006, sayfa 253)

**Örnek 9.6.2** Hipotez testleri ile güven aralıkları arasında, her test fonksiyonuna bir güven aralığı, her güven aralığına da bir test fonksiyonu karşılık gelecek şekilde bir bağ kurulabilir.  dağılımından bir örneklem  olsun. Önceden belirlenen bir  için  hipotezinin  alternatif hipotezine karşı testi problemi için,  olmak üzere,  anlam düzeyli testin



şeklinde verildiğini biliyoruz. Bu testin red bölgesi,  olup  hipotezinin kabul bölgesi



dir. Ayrıca,



olup bu ifade her  için geçerli olduğundan,



veya



dir. Yani,  için  güven katsayılı güven aralığı



şekildedir. Buradan,  örneklem ortalamasının  gözlem değeri için güven aralığı,



olarak yazılır

Güven aralıkları ile ilgili, varyansın bilinip veya bilinmediği durumlara göre normal dağılımın beklenen değeri ve varyansı için güven aralıklarının nasıl yazılacağı aşağıda özetlenmiştir. Bu güven aralıkları birçok temel istatistik kitabında bulunabilir.

a)  biliniyor ise,  için  güven katsayılı güven aralığı,



dır.

b)  bilinmiyorsa,  için  güven katsayılı güven aralığı da



şeklinde yazılır.

c)  için  güven katsayılı güven aralığı ise



olarak verilir.

d) Benzer şekilde, normal dağılımlı iki kitlenin beklenen değerleri arasındaki fark () için  güven katsayılı güven aralığı (varyansların biliniyor olması halinde),



varyanslar bilinmiyor () ise,



şeklindedir. Burada,  dir.

**Örnek 9.6.3.** Bir istatistik dersinin  grubundaki öğrencilerin notları ,  grubundaki öğrencilerin notları da  dağılımlarına uygun olsun. Bu gruplardan rasgele seçilen  öğrencinin notları aşağıda verilmiştir.

|  |  |
| --- | --- |
|  Grubu Notları |  Grubu Notları |
| 60 | 61 | 70 | 58 | 56 | 65 | 69 | 74 | 71 | 68 | 65 | 70 | 84 | 79 | 74 | 97 |
| 72 | 85 | 81 | 56 | 72 | 73 | 73 | 71 | 68 | 72 | 76 | 70 | 81 | 71 | 73 | 78 |
| 87 | 56 | 74 | 72 | 67 | 67 | 71 | 49 | 76 | 78 | 71 | 72 | 57 | 86 | 81 | 66 |
| 64 |  |  |  |  |  |  |  | 81 |  |  |  |  |  |  |  |

Bu verilereden , ,  ve  özet bilgileri elde edilmiştir.

a)Varyanslar biliniyor () ise  ve  parametreleri için %95 lik (yani,  için  güven katsayılı) güven aralıklarını oluşturalım.  için,  için normal dağılım tablosundan  dir. Buna göre,

i)  için %95 lik güven aralığı:  olup değerler yerine konulduğunda aralık,



olur.

ii)  için %95 lik güven aralığı:  olup değerler yerine konulduğunda bu aralık da,



olarak belirlenir.

b) Varyansların bilinmediği durumda  ve  parametreleri için %95 lik ( için  güven katsayılı) güven aralığı yazalım.  için, 

ise dağılım tablosundan  bulunur.

i)  için %95 lik güven aralığı:  olup değerler yerine konulduğunda  için %95 lik güven aralığı,



olur.

ii)  için %95 lik güven aralığı:  olup değerler yerine konulduğunda  için %95 lik güven aralığı da,



olarak hesaplanmıştır.

c)  için %95 lik güven aralığı yazalım.  için ki-kare dağılım tablosundan,  ve  olarak bulunmuştur. Buna göre,  için %95 lik güven aralığı,



olarak hesaplanmıştır.



*Şekil 9.6.2 Örnek (9.6.3c) de varyans için güven aralığına ait ki-kare değeri*

d) Şimdi de, varyansların eşit olduğu varsayımı altında,  farkı için %95 lik güven aralığı oluşturalım. Önce,



olup  hipotezi  anlam düzeyinde red edilemez. Diğer taraftan,



olup,



formülünde ile beraber diğer değerler yerine yazıldığında,  farkı için %95 lik güven aralığı,



olarak hesaplanmıştır