**2.6. Öngörü (Forecasting)**

Zaman serilerinde en önemli kavramlardan biri, rasgele değişkenin gelecekte alacağı değerin öngörülmesidir. İstatistikte *“tahmin (estimation)”*, *“kestirim (prediction)”* ve *“öngörü (forecasting)”* kavramları birbirlerine yakın anlamlar içermesine rağmen aslında çok farklıdır. Tahmin kitlenin bir parametresi için önerilen tahmin edicinin değerdir.

Örneğin,  beklenen değeri  varyansı  olan normal dağılımdan bir örneklem ise,  için  tahmin edicisi önerilir.  nin değeri de  için bir tahmindir. Eğer rasgele değişkenin değerleri



olarak gözlenmiş ise,  için bir tahmin  olur.

Kestirim, bir rasgele değişken için seçilen bir modelin parametrelerinin tahmin değerleri yerine konulduğunda elde edilen değerdir. Kestirim için daha genel tanımlar yapılabilir. Örneğin, ,  basit doğrusal regresyon modelini ele alalım ve aşağıdaki verilerin bu regresyon modeline uygun olduğunu varsayalım.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 7.7 | 9.1 | 8.0 | 8.6 | 10.1 | 7.8 | 7.4 | 8.9 | 6.9 | 12.0 |

Bu modelin parametreleri  ve  olup EKK tahmin değerleri ,  olarak hesaplanmıştır. Buna göre kestirim modeli,  olup  olarak gözlenmiş ancak  olarak kestirilmiştir.

Öngörü, tahmin ve kestirim kavramlarından farklıdır. Öngörü bir modele göre, model parametrelerinin tahmin edilmesi ile rasgele değişkenin gelecekte alacağı değer için önceden kestirimdir. Elimizde aylık enflasyon verileri varsa, önce bu verilere bir model uydurmamız gerekir. Bu modele göre ileriki aylardaki enflasyon değerleri için öngörülerde bulunulabilir. Yani ileriki aylarda enflasyon değişkeninin alacağı değerler için önceden kestirim yapılır. Buna benzer örnekler çoğaltılabilir. Örneğin, geçmiş 10 yıla ait aylık ihracat miktarları kullanılarak, gelecek aylardaki ihracat miktarları hakkında öngörülerde bulunulabildiği gibi, geçmiş yıllara ait Ağustos ayı sıcaklık değerleri kullanılarak bir sonraki Ağustos ayının sıcaklığı hakkında öngörüde bulunulabilir. Diğer taraftan, yıllık buğday üretimleri ele alınarak önümüzdeki yılın buğday üretimi hakkında da bir öngörüde bulunulabilir. Elbette, bu öngörüleri etkileyen başka değişkenler de vardır. Örneğin, yıllık buğday miktarı için bir öngörü istendiğinde geçmiş yıllara ait buğday üretim miktarlarına ihtiyaç olduğu gibi, yağış miktarlarına da ihtiyaç duyulabilir. Bunlar ise, buğday miktarları hakkında öne sürülecek modele bağlıdır. Dolayısı ile, hemen hemen bütün istatistiki analizlerde olduğu gibi önce verilere uygun bir modelin seçilmesi gerekir. Model seçimi için bir çok kriter öne sürülebilir. Bunlardan bazıları ileriki bölümlerde ele alınacaktır. Bu kısımda,  rasgele değişkenlerinin gözlenen değerleri kullanılarak,  rasgele değişkeninin (veya ,  gibi rasgele değişkenlerin) alacağı değerin öngörülmesi üzerinde durulacaktır.

**Tanım 2.6.1**  rasgele değişkenleri verildiğinde,  için bir *öngörü*



koşullu beklenen değeridir

 oluyorsa,  öngörü istatistiği yansızdır denir. Bu öngörünün yansızlığı



koşullu beklenen değerin tanımından açıktır. Bir rasgele değişken için öngörü yapılabildiği gibi aynı anda birden çok rasgele değişken için de öngörü yapılabilir. Yani,  için bir öngörü

 

olur.

 değişkenlerinin ortak dağılımı normal ise,  için bir öngörü  lerin lineer birleşimidir. Buna göre, normallik varsayımı altında çok değişkenli normal dağılımın özelliğinden  için bir öngörü



şeklinde yazılabilir. Buradan, koşullu beklenen değer olarak tanımlanan öngörü, örneklemin lineer birleşimi olup yansızdır. Bu öngörü,  ve  olmak üzere  şeklinde gösterilebilir. Öngörüler verildiği zaman, hata kareler ortalaması veya başka herhangi bir kritere göre karşılaştırılması gerekir.

**Tanım 2.6.2** Öngörü istatistiğinin *hata kareler ortalaması*



dir

Yukarıda verilen  öngörü istatistiği bütün lineer yansız öngörüler içinde en küçük hata kareler ortalamasına sahiptir. Yani, hata kareler ortalaması kriterine göre, koşullu beklenen değer olarak tanımlanan öngörü en iyidir. Bunu göstermek için  gibi başka bir lineer yansız öngörü alalım. Bu öngörünün hata kareler ortalaması olup



olduğu gösterilmelidir.  beklenen değerin içine  teriminin eklenip çıkarılması ile



elde edilir.  ise  terimi her zaman pozitif olduğundan iddia ispatlanmış olur. Diğer taraftan,  ve  öngörüleri yansız olduğundan problem



olduğunun gösterilmesine dönüşür.  ve  olduğundan

 ve 

yazılır. Her iki öngörü de yansız olduğundan  dır. Koşullu beklenen değerin tanımından,



elde edilir. Buradan da, başka herhangi bir lineer yansız öngörü  için,



olduğu görülür. Sonuç olarak  öngörü istatistiği, hata kareler ortalaması kriterine göre en iyidir. O halde,



öngörüsü, en iyi (**B**est), lineer (**L**inear) yansız (**U**nbiased) öngörü (**F**orecast) dür. Başka bir ifade ile,  öngörü istatistiği **BLUF** dır.

Öngörü, koşullu beklenen değer olarak tanımlandı. Veriler normal dağılımlı bir kitleden alınmış ise, koşullu beklenen değer örneklemin lineer birleşimidir. Örneklem normal değilse, koşullu beklenen değer örneklemin lineer bir birleşimi olmayabilir. O zaman, koşullu beklenen değerin doğrudan hesaplanması gerekir. Hemen hemen bütün istatistiki sonuç çıkarımlarda olduğu gibi, normallik varsayımı yapılır. Normallik varsayımında problem varsa, dönüşümler yapılarak (genellikle logaritması alınarak) normallik sağlatılır. Bu nedenle, öngörü kavramı açıklanırken sadece lineer birleşimler üzerinde duruldu. Şimdi normallik varsayımı altında bu koşullu beklenen değerin gerçekten örneklemin bir lineer birleşimi olduğunu görmeye çalışalım.

 ve  olmak üzere,  ve  nin ortak dağılımı normal olsun. Yani,  ve  nin ortak dağılımı,



olarak verilmiş olsun. O zaman  verildiğinde  nin koşullu dağılımı,

 

olup, koşullu beklenen değer ve varyans

 ve 

şeklindedir. Buradan  için bir öngörü

=

şeklinde örneklemin lineer birleşimidir. Bundan böyle aksi söylenmedikçe, hata terimlerinin normal olduğu varsayılacaktır.

**Örnek 2.6.1**  ler beklenen değeri sıfır varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere,  zaman serisi AR(1) modeline uygun olarak



şeklinde verilmiş olsun. Ayrıca, bütün  ler için  ve  bağımsız olsun.

 için seri durağandır.  değişkenlerinin değerleri gözlendiğinde,  değişkenlerini öngörmek isteyelim.  ile  ler bağımsız olduğundan,



dır. Buna göre,  için bir öngörü



olarak yazılır. Diğer öngörüler



şeklinde ardışık olarak hesaplanır. Böylece, öngörüler

, , …, 

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi, bütün öngörüler rasgele değişkenin en son değerine bağlıdır. Diğer taraftan, serinin beklenen değeri sıfırdır. Ayrıca,  iken



dir. Yani, öngörüler serinin beklenen değerine yaklaşır. Bir sonraki bölümde görüleceği gibi, durağan zaman serileri için  örneklem ortalaması, kitle ortalamasına () olasılıkta yakınsar. O halde, seri durağan ise öngörüler örneklem ortalamasına yaklaşır. Seri durağan değilse, yani  olduğunda, öngörüler hep aynı kalır. Bu değer ise, bütün  ler için  dir

Öngörüler hesaplandıktan sonra, öngörü hataları ve bu hataların varyanslarına istatistiksel sonuç çıkarım açısından ihtiyaç duyulur. En azından yapılan öngörüler için bir güven aralığının verilmesi gerekebilir.

 örneklemine bağlı olarak hesaplanan  için öngörü hatası doğal olarak  ve öngörü hatasının varyansı da  dır. Örnek (2.6.1) de elde edilen öngörülerin hataları ve öngörü hatalarının varyansları aşağıdadır. Öngörü hatalarından ilk iki tanesi,



şeklindedir. Bu işlemler ardışık olarak devam ettirildiğinde öngörü hataları



olarak yazılabilir. Öngörü hatalarının varyansları da

 

şeklindedir. Bunlardan ilk üç tanesi,







şeklinde hesaplanmıştır.  için bir öngörü de,



olup, öngörü vektörünün hatası



şeklindedir. Öngörü hatasının varyansını hesaplamak için,

 ve 

olmak üzere, öngörü hatalarını  şeklinde yazalım. Buradan, öngörü hata vektörünün varyans-kovaryans matrisi,



şeklinde olur.

**Örnek 2.6.2** Aşağıdaki verilerin AR(1) modeline uygun olduğunu kabul edelim. Satır halinde 20 veri aşağıdadır.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -2.2 | -2.6 | -4.0 | -4.6 | -3.5 | -5.0 | -6.5 | -6.2 | -8.0 | -4.3 |
| -4.5 | -2.5 | -2.0 | -1.6 | -0.3 | 4.6 | 4.2 | 1.9 | 4.9 | 3.3 |

Bu verilere ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlardan bazıları hesaplanarak aşağıda verilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 1.00 | 0.824 | 0.660 | 0.540 | 0.324 | 0.096 |
|  |  | 0.824 | -0.057 | 0.038 | -0.377 | 0.202 |

 nin  üzerine regresyonundan ()  nın EKK tahmini  olarak bulunmuştur. Bu model,  olarak yazılığında,  kitle ortalamasını  ile tahmin edelim. Bu değer de,  olarak gözlenmiştir.  şeklinde verilen regresyon modeli  olmak üzere,  şeklinde yazılabilir. Buradan da  nın EKK tahmini  olarak elde edilmiş olur. Böylece kestirim denklemi,  olarak elde edilir. Öngörülerden ilk iki tanesi,





olarak hesaplanmıştır. Öngörüler için %95 lik bir güven aralığı yazmak için verilerin normal dağılımlı bir kitleden alındığını varsayalım. Beyaz gürültü serisinin standart hatası  olup, normal dağılım tablosundan,  dır. ’in öngörüsü için %95 lik güven aralığı den  veya  olarak yazılır. Şimdi  için bir güven aralığı yazalım.  olup, standart hatası

 

olarak bulunmuştur. Buradan %95 lik güven aralığı  veya  olarak elde edilir. Aynı veriler kullanılarak SAS PROC ARIMA’da,  için %95 lik güven aralığı ,  için %95 lik güven aralığı da  olarak hesaplanmıştır. Aradaki fark, kesirlerin yuvarlatılması ve  ile  parametrelerinin başka bir yöntem ile hesaplanmasından kaynaklanmaktadır

 şeklinde verilen AR(1) modelini tekrar ele alalım.  için model durağandır. Modelin beklenen değeri , varyansı da  dir. Diğer taraftan, öngörüler  için  şeklindedir. Seri durağan ise öngörüler serinin ortalamasına, öngörü hatalarının varyansı da serinin varyansına yaklaşır. Durağan değilse bu yakınlaşma geçerli değildir.

 şeklinde verilen AR(1) modeli  rasgele değişkeninin değerine de bağlıdır. Buraya kadar,  alınarak işlemler yürütüldü. Genel olarak yapılan da budur. Ancak,  değişkeninin aldığı değerin de kestirilmesi beklenebilir.  denirse, model  şekline dönüşür. Buradan,  eşitliğinden,  yazılır ve  için bir kestirim de  şeklinde yazılabilir.

Yukarıda, AR(1) modeli için öngörülerin nasıl hesaplanacağı hakkında kısa bilgiler verildi. Şimdi yüksek dereceden modeller için öngörülerin nasıl yapılacağını görelim. AR(2) zaman serisi modeli,  olmak üzere



olarak verilmiş olsun. AR(2) modelini  olmak üzere,



şeklinde yazabiliriz.  verildiğinde için () öngörüler,



koşullu beklenen değeri ile hesaplanır.  koşullu beklenen değerde yerine yazılırsa  olduğu da dikkate alınarak  için öngörüler,



şeklinde ardışık olarak hesaplanır. Bunlardan ilk üç tanesi,









şeklinde hesaplanmıştır. Burada,

 ,  ve

 

olup diğer öngörüler  ve ’e bağlı olarak



eşitliği ile hesaplanır.

Görüldüğü gibi, AR(2) modelinde  örneklem değerleri verildiğinde, öngörüler örneklemin son iki değerine bağlıdır. AR(3) modeli ele alınmış olsaydı, öngörüler örneklemin son üç değerine bağlı olacaktı. Kısaca, model nasıl verilmiş ise öngörüler de otokorelasyonlar da olduğu gibi aynı formdadır.

AR(2) modeli için elde edilen öngörü hatalarından ilk üç tanesi







olarak bulunmuştur. Öngörü hataları genel olarak,



ve öngörü hatalarının varyansı da,



şeklindedir.  iken öngörü hatalarının varyansının



şeklinde olduğu görülür.

**Örnek 2.6.3**  olmak üzere  zaman serisi modelini ele alalım. Son iki gözlem  ve  olarak verilmiş olsun. Öngörülerin son iki gözlem değerine bağlı olduğunu biliyoruz. Buna göre öngörüler,

 

eşitliğinden ardışık olarak hesaplanır. İlk 20 öngörü (yuvarlatmalardan sonra) aşağıda verilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 10.520 | 10.684 | 10.588 | 10.308 | 9.899 | 9.408 | 8.865 | 8.298 | 7.723 | 7.155 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6.602 | 6.073 | 5.569 | 5.096 | 4.654 | 4.242 | 3.860 | 3.509 | 3.185 | 2.889 |

Modelin karekteristik denklemin kökleri  ve  olup iki kök de mutlak değerce 1 den küçüktür. Yani seri durağandır. Öngörüler de serinin ortalamasına yaklaşır. Yukarıda hesaplanan öngörüler incelendiğinde, ilk iki öngörüde, küçük bir sıçrama söz konusu iken daha sonra bir azalma eğilimi gözlenmektedir. Öngörü sayısı arttıkça bu azalma devam eder.

AR(2) modeli  şeklinde bir regresyon modeline benzer. Regresyon çözümlemesi yapıldığında,  ve  parametrelerinin tahmin değerleri,  ve  olarak gözlenmiş olsun. Bir an için  tahmin değeri yuvarlatılarak  alınırsa, kestirim denklemi  şeklinde olur. Model  şeklinde ise karekteristik denklemin kökleri  ve  olup öngörüler yine koşullu beklenen değer ile hesaplanacaktır. Bu model göz önüne alınarak hesaplanan koşullu beklenen değerlerden ilk 20 tanesi aşağıda verilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 10.700 | 11.190 | 11.533 | 11.773 | 11.941 | 12.059 | 12.141 | 12.199 | 12.239 | 12.267 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 12.287 | 12.301 | 12.311 | 12.317 | 12.322 | 12.325 | 12.327 | 12.329 | 12.331 | 12.331 |

Hesaplanan değerler incelendiğinde,  değeri yanlışlıkla  olarak alınırsa öngörülerin artan bir eğilim gösterdiği ve belli bir yerden sonra sabitleştiği gözlenmektedir. Oysa, durağan halde öngörülerin azalarak serinin ortalamasına doğru yaklaşacağını biliyoruz. Dolayısı ile, parametrelerin tahmin değerlerinde yapılacak yuvarlatma hatalarına dikkat edilmesi gerekir

 ve  modellerine uygun olarak rasgele üretilen 100 verinin ve bu serilere ait 100 öngörünün grafikleri aşağıdadır.

Grafikler incelendiğinde, durağan seri için öngörüler örneklem ortalamasına yaklaşmakta, durağan olmayan seri için ise, öngörüler belli bir yerden sonra sabitleşmesine rağmen örneklem ortalamasından uzaktır.

|  |  |
| --- | --- |
|    |    |
|  |  |

 Burada, durağan serinin beklenen değeri , durağan olmayan serinin beklenen değeri de  olarak hesaplanmıştır.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Seri |  |  |
| ACF |  |  |
| PACF |  |  |

AR(p) zaman serisi modellerinde öngörüleri hesaplamak diğerlerine göre daha kolaydır. Şimdi, ARMA(p,q) zaman serisi modellerinde öngörülerin nasıl hesaplanacağını görelim. AR serilerinde olduğu gibi öngörüleri açık bir eşitlik ile ifade etmek zordur. ARMA(p,q) modellerinde öngörüler hata terimlerinin kestirim değerlerine de bağlıdır. Bu hata terimlerinin bazıları (modele bağlı olarak) kestirildikten sonra öngörüler AR modellerinde olduğu gibi ardışık olarak hesaplanabilir. ARMA(p,q) modeli  olmak üzere,



olarak verilsin. Bu model,  olmak üzere,



şeklinde ifade edilebilir.  rasgele değişkenlerinin değerleri verildiğinde,  için nin öngörüleri yine



koşullu beklenen değer ile hesaplanır. Karmaşıklığı önlemek için,  alalım. Bu durumda, ARMA(1,1) zaman serisi modeli,



biçiminde olup, birinci öngörü

şeklindedir. İkinci öngörü ise,



dir. Böyle devam edildiğinde öngörüler serinin gözlenen son değeri ile en son hata terimine bağlıdır. Bu durumda, önce bu hata teriminin kestirilmesi gerekir. Bunu aşağıda verilen örnek üzerinde görmeye çalışalım.

**Örnek 2.6.4**  olmak üzere



modeline uygun olduğu varsayılan serinin ilk 6 gözlem değeri

, , , ,  ve 

şeklinde verilmiş olsun ve  öngörülerini hesaplayalım. Yukarıda belirtildiği gibi, öngörüler hata terimlerine de bağlıdır. O halde, önce hata terimlerinin kestirilmesi gerekir. Birinci öngörü  ( olduğunu hatırlayalım) olup, öngörü hatası,



dir. Benzer şekilde  öngörü değeri,



olur. İkinci öngörü hatası ise,



dir. Görüldüğü gibi öngörüler son gözlem değeri ile  hata terimine bağlıdır.  gözlenmiş olmasına rağmen, öngörülerin hesaplanabilmesi için  hata teriminin kestirilmesi gerekir. Bunun için önce  alınarak  ler ile  lerin kestirimleri hesaplanır. Bunlardan ikinci öngörü  olup  için bir kestirim  olarak bulunur. Bu şekilde devam ederek diğer kestirimler

,





 











şeklinde hesaplanmıştır. Bundan sonraki öngörüler,  şeklinde ardışık olarak hesaplanır.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Gözlem | 6 | 9 | -8 | -10 | 8 | 3 |  |  |  |  |  |
| Kestirim | - | 4.8 | 9.3 | -15.05 | -5.475 | 13.14 |  |  |  |  |  |
| Hata | 0 | 4.2 | -17.3 | 5.05 | 13.48 | -10.14 |  |  |  |  |  |
| Öngörü |  |  |  |  |  |  | -2.67 | -2.135 | -1.708 | -1.37 | -1.09 |

Bunlardan bazıları tablo halinde yukarıda verilmiştir

Aşağıda  modeline uygun üretilen 100 verinin zaman serisi grafiği ile otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının grafikleri bulunmaktadır. Veriler SAS PROC ARIMA da,

 data a; input x; cards;

 

 proc arima; i var=x; e p=1 q=1; forecast lead=20;

 run;

kodları kullanılarak,  şeklinde bir modelin uygun olduğu göz önüne alınmış, parametre tahminleri ,  ve  olarak elde edilmiştir. Buna göre, ilk 20 öngörünün grafiği aşağıdadır.

|  |
| --- |
| Model:  |
| Seri | ACF | PACF |
|  |  |  |

|  |
| --- |
|  |

Bu bölümde, bazı durağan zaman serisi modelleri ile otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları incelenmeye çalışıldı. Bununla birlikte, zaman serilerinde önemli kavramlardan biri olan öngörü kavramı ele alındı.

Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlar ile öngörüler modele bağlı olarak bulunmaktadır. O zaman, verilere uygun bir modelin uydurulabilmesi için model parametrelerinin tahmin edilmesi gerekir. Bu bölümde, parametre tahminlerine girilmedi. Parametrelerin tahmin yöntemleri ile tahmin edicilerin asimptotik özellikleri bir sonraki bölümde incelenecektir.

**2.7. Problemler**

**2.7.1** Aşağıdaki AR(2) modellerine ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarını hesaplayıp grafiklerini çiziniz.

**a)** ** b) **

**2.7.2** AR(3) zaman serisi modeli **** olmak üzere **** şeklinde verilmiş olsun.

**a)** Otokorelasyon fonksiyonunun ilk iki değerinin

, 

şeklinde olduğunu gösteriniz

 **b)** Model  şeklinde verilmiş ise otokorelasyon fonksiyonunu  için hesaplayıp grafiğini çiziniz.

 **2.7.3** Aşağıda verilen zaman serisi modellerinden durağan olanların otokorelasyon fonksiyonlarını  için hesaplayınız.

**a)** 

**b)** 

 **c)** 

 **d)** 

 **2.7.4** Aşağıda verilen zaman serisi modellerinden durağan olanların kısmi otokorelasyonlarını  için hesaplayınız.

 **a)**  **b)** 

**c)**  **d)** 

 **2.7.5** Aşağıda verilen zaman serisi modellerinden durağan olanlarını  şeklinde yazınız.  katsayılarını  için hesaplayınız.

**a)** 

**b)** 

**c)** 

**d)** 

 **2.7.6**  olmak üzere, herhangi bir zaman serisinin otokovaryansları arasında  şeklinde bir bağıntının olduğunu varsayalım. Buna göre uygun modeli belirleyiniz. Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarını elde ediniz. Belirlediğiniz modele uygun olduğu varsayılan modele ait son  gözlem değeri , , ,  ve  olarak verilmiş olsun. Buna göre,  için  öngörülerini, öngörü hatalarını ve öngörü hatalarının varyanslarını hesaplayınız.

 **2.7.7** AR(2) modeli  şeklinde verilmiş ve bu model için otokovaryanslardan bazıları ( birimlik örnek için elde edilen tahmini otokovaryanslar)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  | 390 | 360 | 277.5 | 157.5 | 19.4 | -113.8 | -223.7 | -294.6 | -317.6 |

olarak verilmiştir. Bu seri için son iki gözlem değeri  ve  dir. Buna göre,  ve  öngörülerini, öngörü hatalarını ve öngörü hatalarının varyanslarını hesaplayınız

 **2.7.8** Herhangi bir zaman serisine ait  gözlem satırlar halinde aşağıda verilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 846 | 827 | 799 | 768 | 719 | 652 | 580 | 546 | 500 | 493 | 530 |
| 548 | 565 | 572 | 632 | 645 | 674 | 693 | 706 | 661 | 648 | 604 |
| 647 | 684 | 700 | 723 | 741 | 734 | 708 | 728 | 737 | 729 | 678 |
| 651 | 627 | 582 | 521 | 519 | 496 | 501 | 555 | 541 | 485 | 476 |
| 515 | 606 | 694 | 788 | 761 | 794 | 836 | 846 |  |  |  |

**a)** Bu verilerin zaman serisi grafiği ile otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlarını (ilk 10 tanesini herhangi bir paket program kullanarak) hesaplayıp grafiğini çiziniz.

 **b)** Verilerin  şeklinde bir regresyon modeline uygun olduğunu varsayalım. Regresyon parametrelerinin EKK tahminlerini bulunuz. Bu tahminler  ve  olsun. Modeli  şeklinde (veya regresyon modeli gibi ) yazalım. Buna göre,  değerlerini  için hesaplayınız.  ve  öngörü değerlerini, öngörü hatalarını, öngörü hatalarının varyanslarını hesaplayınız.

 **2.7.9** ARMA(2,2) zaman serisi modeli  olmak üzere  şeklinde verilmiş olsun. Bu zaman serisi modeli durağan mıdır? Eğer durağan ise modeli  serisini  şeklinde yazınız.  katsayılarını  için hesaplayınız.

 **2.7.10**  şeklindeki bir modelin,  otokorelasyonlarını ve  kısmi otokorelasyonlarını  için hesaplayıp grafiğini çiziniz.