**Örnek 2.3.1 a)**  olmak üzere,  şeklinde verilen MA(1) zaman serisi modeli için, kısmi otokorelasyonlar



formülü ile hesaplanır (Wei, 2006, s.50, Brockwell ve Davis 1987, s.100). Daha yüksek dereceli MA modelleri için kısmi otokorelasyon fonksiyonunun analitik ifadesi kolay değildir. MA(1) modeli için parametre değeri  olarak seçilerek otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlardan birkaç tanesi hesaplanmış ve fonksiyonun grafiği (ilk 8 değeri) aşağıda verilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  | 0.48 | -0.32 | 0.22 | -0.16 | 0.13 | -0.09 | 0.08 | -0.06 |

|  |  |
| --- | --- |
| Otokorelasyon Fonksiyonu | Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu |
|  |  |

Grafiklere bakıldığında, otokorelasyonlar birinci gecikmeden sonra sıfır olmasına rağmen, kısmi otokorelasyonların mutlak değerce azaldığı gözlenmektedir. Herhangi bir MA(2) modeli için de otokorelasyonlar ikinci gecikmeden sonra sıfır olup, kısmi otokorelasyonlar mutlak değerce azalalarak sıfıra yaklaşır.

**b)**  olmak üzere  olarak verilen AR(2) zaman serisi modelinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlarını hesaplayalım. Bu serinin otokorelasyonlarından ilk 8 tanesi Yule-Walker denklemlerinden hesaplanarak aşağıda verilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  | 0.887 | 0.7358 | 0.5965 | 0.4796 | 0.3844 | 0.3077 | 0.2234 | 0.1719 |

Birinci kısmi otokorelasyon, birinci otokorelasyon değerine eşittir. Yani,  ve  den  dir. İkinci kısmi otokorelasyon değeri için ilgili matris ve determinantlar,





şeklindedir. Buna göre, ikinci kısmı otokorelasyon



olup  için kısmi otokorelasyonlar  dir. Gerçekten, üçüncü kısmi otokorelasyon için ilgili matris ve determinantlar,





şeklinde olup, üçüncü kısmı otokorelasyon  dır.

Böylece, AR(2) modeli için kısmi otokorelasyonlar ikinci gecikmeden sonra sıfırdır. AR(2) modeline ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.

|  |  |
| --- | --- |
| Otokorelasyon Fonksiyonu | Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu |
|  |  |

**c)** Aşağıdaki verileri göz önüne alalım:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 10 | 12 | 8 | 14 | 12 | 17 | 13 | 16 | 20 | 18 |

Bu verilere ait otokorelasyonlardan bazıları (ilk üç tanesi)

,  ve 

olarak de hesaplanmıştı (Kısım 1.4). Birinci kısmi otokorelasyon değerinin  olduğu açıktır. İkinci kısmı otokorelasyon için ilgili matris ve determinantlar





olup, ikinci kısmi otokorelasyon  olarak bulunmuştur. Üçüncü kısmi otokorelasyon için matrisler ve determinantlar,





olup, üçüncü kısmi otokorelasyon  dir. Bu değerler SAS da aşağıdaki kodlar kullanılarak da bulunabilir.

data a; input x@@; cards;

1. 12 8 14 12 17 13 16 20 18

;

proc arima; i var=x nlag=3; run;

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zaman Serisi | Otokorelasyonlar | Kısmi Otokorelasyonlar |
|  |  |  |

Bu zaman serisine ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlar Splus paket programında hesaplanarak grafikleri yukarıda verilmiştir.

**d)** Türkiye’nin 1923-1996 dönemi yıllık ihracat miktarlarına () ait grafikler aşağıdadır. Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının değerleri Splus paket programında, acf(x) ve acf(x,type=”patial”) kodları ile hesaplanmış, grafikleri de Splus paket programında çizilmiştir.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zaman Serisi | Otokorelasyonlar | Kısmi Otokorelasyonlar |
|  |  |  |

Zaman serisine ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlardan bazıları (ilk 10 tanesi) aşağıdadır.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 1 | 0.954 | 0.912 | 0.874 | 0.835 | 0.793 | 0.7527 | 0.7093 | 0.665 | 0.6163 | 0.5636 |
|  |  | 0.954 | 0.018 | 0.014 | -0.017 | -0.051 | -0.015 | -0.056 | -0.03 | -0.085 | -0.078 |

Otokorelasyonlar azalmasına (yavaş) rağmen kısmi otokorelasyonlardan birincisi hariç diğerleri sıfırdır (güven sınırları içinde). Otokorelasyonlar yavaş azaldığından serinin durağanlığından şüphelenilir. Ancak bu yargıya varabilmek için istatistiki sonuç çıkarımların yapılması gerekir. Bu veriler ileride tekrar ele alınacaktır

**Örnek 2.3.2 a)**  olmak üzere AR(1) modeli  verildiğinde otokorelasyon fonksiyonunun  şeklinde olduğunu biliyoruz. Şmdi, bu modelin kısmi otokorelasyonlarını hesaplayalım. Önce,  olup, model AR(1) olduğundan diğer kısmi otokorelasyonlar sıfırdır. Bunlardan iki tanesini hesaplayalım. Önce, ikinci kısmi otokorelasyon için,  ve  matrisleri



şeklindedir. Buradan,  ve  olup, ikinci kısmi otokorelasyon  dir. Benzer şekilde  için  ve  matrisleri ile determinantları



şeklinde olup üçüncü kısmi otokorelasyon  dır. Diğer taraftan,  için  ve  olacağından, bütün  için  dır.

**b)**  olmak üzere AR(4) modeli  olarak verilmiş olsun. Bu modelin otokorelesyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarını hesaplayalım. Otokovaryans fonksiyonu  için



eşitliğinden  eşitliğini sağlar. Yule-Walker denklemleri değişik  değerleri için,



olarak yazıldığında otokorelasyon fonksiyonu,



şeklinde yazılabilir. İlk üç kısmi otokorelasyon,  olup dördüncü kısmi otokorelasyon için  ve  matrisleri sırası ile



şeklindedır.  ve  olduğundan dördüncü kısmi otokorelasyon değeri  olur. Diğer kısmi otokorelasyonlar da benzer şekilde hesaplanır. Kısmi otokorelasyon fonksiyonunun tanımından  için  dır.

|  |  |
| --- | --- |
| Otokorelasyon Fonksiyonu | Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu |
| otokoloresyon1 | Açıklama: D:\DERYACA\ZAMAN SERILERİ(3)15.6.2012\Şekiller\otokoloresyon 2.EPS |

AR(4) modeline ait otokorelasyonlar periyodik şekilde olarak azalır, kısmi otokorelasyonlar ise dördüncü gecikmede  değerini alıp diğer bütün gecikmelerde sıfırdır. Bu tür seriler mevsimsel seriler olup özellikleri daha sonra ayrıntılı incelenecektir

Aşağıda değişik modeller için rasgele üretilen (100 birimlik) verilere ilişkin zaman serisi grafiği ile Splus paket programında hesaplanan otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonların grafikleri bulunmaktadır.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Örnek 2.3.3 a)**  olmak üzere AR(2) modeli  olarak verilsin. Modelin arekteristik denklemi  olup, köklerin her ikiside aynı ve mutlak değerce 1 den küçüktür. O halde, seri  olarak ifade edilebilir. Yani,  katsayıları öyle belirlenebilir ki,  zaman serisi



şeklinde yazılabilir. Kökler tekrar ettiğinden homojen fark denkleminin genel çözümü  şeklindedir.  başlangıç koşulları ile katsayılar  olarak bulunmuş, genel çözüm de  olarak yazılmıştır. Buradan,  zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu,



şeklinde hesaplanabilir. Otokovaryans fonksiyonunu açık olarak,



dir. Buradan, otokorelasyon fonksiyonu da



olur. Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlar dan bazıları aşağıdadır.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 1 | 0.8 | 0.55 | 0.35 | 0.2125 | 0.125 |
|  |  | 0.8 | -0.25 | 0 | 0 | 0 |

Kısmi otokorelasyonlardan üç tanesi aşağıda açık olarak hesaplanmıştır. Önce,  olduğu açıktır.  için  ve  matrisleri ve bu matrislerin determinantları,





olup, ikinci kısmi otokorelasyon değeri  dir. İkinci kısmi otokorelasyonun  olduğu, modelin AR(2) olmasından doğrudan yazılabilirdi. Diğer kısmi otokorelasyonlar sıfırdır. Bunlardan  için  ve  matrisleri ve bu matrislerin determinantları





şeklinde hesaplanmıştır. Buradan üçüncü kısmi otokorelasyonun  olduğu görülür. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdadır.

|  |  |
| --- | --- |
| Otokorelasyon Fonksiyonu | Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu |
|  |  |

AR(2) modeli  şeklinde verilmiş olsun. Modelin karekteristik denklemi  olup denklemin kökleri reel ve birbirine eşit ise otokorelasyon fonksiyonu



şeklindedir (Fuller, 1996,s.56). Otokorelasyonları buradan da hesaplanabilir.

**b)**  şeklindeki AR(2) modelinin karekteristik denkleminin kökleri kompleks ise otokorelasyon fonksiyonu



şeklindedir (Fuller, 1996, s.56). Burada,

,  ve



dır.

 zaman serisi modelinin karekteristik denklemi  olup kökler  ve  dir. Buna göre,







değerleri hesaplanmıştır. Buradan serinin otokorelasyon fonksiyonu,



şeklinde olup ilk 10 otokorelasyonun grafiği (Maple VIII) aşağıdadır.

|  |
| --- |
| UNTITLED-9a |

Kısmi otokorelasyonların hesabı matris determinantlardan zor olabilir. Otokorelasyonlarda olduğu gibi, kısmi otokorelasyonlar da ardışık olarak hesaplanabilir. Modelin otokorelasyonları  ve kısmi otokorelasyonları da  ile gösterelim.  olup diğer kısmi otokorelasyonlar



formülü ile ardışık olarak hesaplanabilir. Burada,  için



dir. Formül örneklem kısmi otokorelasyonları için de geçerlidir.  ve  sırası ile örneklem otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonu olsun. Örneklem kısmi otokorelasyonları da  için



olmak üzere,



şeklinde ardışık olarak hesaplanabilir. Beyaz gürültü serisinin örneklem kısmi otokorelasyonları,  şeklindedir. Buradan, beyaz gürültü serisinin örneklem kısmi otokorelasyonlarının  bandının içinde kalması beklenir.

Bu formülleri kullanarak  şeklinde verilen zaman serisi modelinin kısmi otokorelasyonlarını hesaplayalım. Yukarıdaki formülden otokorelasyon değerleri (yuvarlatmalardan sonra, ilk 6 tanesi)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

olarak hessaplanmıştır. Kısmi otokorelasyon değerlerinden bazıları,









şeklindedir (üçüncü kısmi otokorelasyon sıfırdır, fark yuvarlatma hatasından kaynaklanmaktadır). Benzer şekilde ikinci kısmi otokorelasyonun  olması gerekir. Bu değer de yuvarlatmalardan kaynaklanan küçük sapma ile gerçek değere yakındır

MA serilerinde otokorelasyonlar belli bir yerden sonra sıfır olup kısmi otokorelasyonlar mutlak değerce azalır. AR serilerinde durum tam tersidir. Yani, otokorelasyonlar mutlak değerce azalır, kısmi otokorelasyonlar belli bir yerden sonra sıfırdır. Bu fonksiyonlar AR ve MA serilerinin model derecelerinin belirlenmesinde kullanılabilir. Bazen hem otokorelasyonlar hem de kısmi otokorelasyonlar yukarıdaki özelliklere uymayabilir.