**2.2. Otoregresif (AR) Seriler**

Otoregresif zaman serileri, serinin geçmiş değerleri ve beyaz gürültüden etkilenir. Bir çok iktisadi veri otoregresif zaman serisi olarak modellenir. Örneğin, aylık enflasyon oranları, bir önceki değerlerinden etkilendiği gibi daha önceki aylardaki oranlardan da etkilenir. Ağustos ayının enflasyon oranının, Temmuz ile bir önceki yılın Ağustos ve Temmuz aylarındaki enflasyon oranlarından etkileneceği düşünülür. Tabii, diğer aylardaki artış oranları da Agustos ayındaki artış oranı ile ilişkili olabilir. Buna benzer örnekler arttırılabilir.

 ve  de serinin beklenen değerini göstermek üzere, .nci dereceden otoregresif zaman serisi modeli,



olarak verilir. Model,

olarak yazılabildiğinden, AR(p) zaman serisi modeli genellikle



şeklinde ifade edilir. İşlemlerin kolay yürümesi açısından  alarak, AR(p) modelini,



şeklinde yazalım. Model durağan ise  alınması herhangi bir sorun yaratmaz. Aksi halde,  dönüşümü ile sıfır beklenen değerli modele dönülür.

Otoregresif zaman serilerinde durağanlığın sağlanması MA serilerindeki gibi kolay değildir.  modelinde  lerin özel seçilmesi ile AR(1) zaman serisi modeli elde edildi. Yani, durağan AR(1) zaman serisi modeli,  modeli gibi yazılabilir. Benzer şekilde durağan herhangi bir AR(p) zaman serisi modeli de  modeli olarak ifade edilebilir. Bunun örneklerini aşağıda göreceğiz.

AR modellerinde durağanlık serinin karekteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Denklemin bütün kökleri mutlak değerce  den küçük ise model durağandır. Dolayısı ile, AR serilerinde durağanlık koşullarının doğrudan sağlatılması pratik olmadığından, karekteristik denklemin köklerine bakılır. AR(p) modeline karşılık gelen karekteristik denklem



şeklindedir. Denklemin bütün kökleri mutlak değerce  den küçük ise model durağandır. Köklerden en az bir tanesi mutlak değerce 1 olan serilere *birim köklü seriler* denir. Birim köklü seriler ileride ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Köklerin mutlak değerce  den büyük olması, pratikte karşılaşılan bir durum olmadığından böyle seriler üzerinde durulmayacaktır.

Yukarıda  modelinde katsayıların özel seçimi ile elde edilen AR(1) modelini ele alalım ve modeli  olmak üzere,



şeklinde yazalım. AR(1) modeline karşılık gelen karekteristik denklem  ve denklemin kökü  dir. O halde AR(1) modeli,  mutlak değerce  den küçük ise durağan, aksi halde durağan değildir. Bu model,  olmak üzere,  şeklinde de yazılabilir.  olması halinde serinin beklenen değeri , modelden düşer ve model  haline gelir.  için  ler açık olarak yazıldığında model  şekline dönüşür ve  olmasına rağmen  dir. Sonuçta, varyans zamana bağlıdır ve model durağan değildir.

 için  zaman serisi modeli durağandır. Buradan, beklenen değer, varyans ve otokovaryans fonksiyonu

,  ve 

şeklinde olup zamana bağlı değildir. Varyans ve otokovaryans fonksiyonu başka şekilde de hesaplanabilir. Otokovaryans fonksiyonunun  için,



olduğu açıktır.  ve  olduğundan varyans  şeklinde yazılabilir. Buradan modelin varyansı  olur. Otokovaryans fonksiyonu  için,



şeklindedir. Özet olarak,

 

denklemleri yazılır. Bu denklemler AR(1) zaman serisi modeli için *Yule-Walker denklemleridir*. Yule-Walker denklemlerinin ikincisinden,



elde edilir. Buradan da modelin otokorelasyon fonksiyonu da  şeklinde olur. AR(1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu  olduğundan üstel olarak azalır.  büyüdükçe azalma yavaşlar.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

AR(1) modeline uygun olarak,  nun farklı değerleri için rasgele üretilen 100 veriye ilişkin hesaplanan otokorelasyonların grafikleri yukarıda verilmiştir.

Yukarıda durağan  zaman serisi modeli verildiğinde, özel seçilmiş katsayılar ile  serisine ulaşıldı. Aslında bunun tersi de geçerlidir. Durağan bir AR modeli  modeli gibi yazılabilir.  *gerileme operatörü* ile  modeli  veya  şeklinde yazılabilir. Böylece, durağan  zaman serisi modeli



şeklinde ifade edilebilir.

Daha yüksek dereceden durağan AR zaman serisi modelleri için de aynı geçişler yapılabilir. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde görelim.

**Örnek 2.2.1** İkinci dereceden durağan AR(2) zaman serisi modeli  olmak üzere,  şeklinde verilmiş olsun. Modelin karekteristik denklemi  ve kökleri  ve  dir. Her iki kök de mutlak değerce  den küçüktür. O halde, verilen AR(2) zaman serisi modeli durağandır. Model durağan olduğundan  şeklinde yazılabilir. Model bu şekilde yazıldığında  katsayılarının belirlenmesi gerekir. Bu katsayılar değişik yollardan bulunabilir. Örneğin, ile  ve  serileri

şeklinde açık olarak yazıldığında sol taraf  olacak şekilde taraf tarafa toplansın. Buradan

eşitliği elde edilir. Sağ tarafın özdeş olarak  olması için,  nin katsayısı hariç diğer bütün katsayılar sıfır olmalıdır. Yani,



dir. Katsayıların belirlenmesi için homojen fark denkleminin, başlangıç koşulları altında çözülmesi gerekir. Homojen denklemin kökleri serinin karekteristik denkleminin kökleri ile aynıdır ( ve  reel ve birbirlerinden farklıdır). Buna göre genel çözüm  olup,  ve  başlangıç koşulları ile  ve  denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümünden katsayılar  ve  olarak bulunmuştur. Buradan,  şeklinde verilen durağan ikinci dereceden AR zaman serisi modeli,



şeklinde yazılabilir. Bu katsayıları şimdi de başka bir şekilde elde edelim.  olmak üzere,  zaman serisi modelini  şeklinde yazalım. Bu durumda, ,  ler türünden



şeklinde yazılabilir. Ayrıca,



den  özdeşliği elde edilir. Bu özdeşliğin çözülmesi ile katsayılar  ve  eşitliklerinden  ve  olarak bulunur. Bu katsayılar yukarıda elde edilen  ve  ile aynıdır. Buradan  katsayıları,  şeklinde olur. Kolayca görüleceği gibi,



dir. Daha önce, durağan  serisinden hareketle AR(1) modeline nasıl ulaşabildiğimizi gördük. Şimdi, yine  modelinden hereketle AR(2) modeline nasıl ulaşabileceğimizi görelim.  zaman serisi modeli



olarak verilmiş olsun.  in 0.8 ile çarpılması ile,



eşitliği elde edilir.  olmak üzere  ve  in yukarıdaki ifadeleri yerine yazıldığında ,





olur.  olup bu model  şeklinde AR(1) modeli olarak yazılabilir (Örnek (2.1.3)). Buradan,  eşitliği kullanılırsa model  şekline dönüşür. Bunun düzenlenmesi ile  şeklinde AR(2) zaman serisi modeline ulaşılır. Sonuç olarak, durağan AR(2) zaman serisi modeli de  modeli şeklinde yazılabilir

**Örnek 2.2.2** Durağan AR(2) modeli,  olmak üzere,  şeklinde verilsin. Modelin karekteristik denklemi  olup, kökleri  ve  dir. Köklerden bir tanesi 1 olduğundan model durağan değildir. Modelin kendisi durağan değildir. Ancak  birinci fark serisi durağandır. Burada,  ifadesi  şeklinde yazıldığında



elde edilir. Yani,  veya  durağan zaman serisi modeli elde edilir

**Tanım 2.2.1**  gecikme operatörünü göstermek üzere,  operatörüne *fark operatörü* denir. Durağan olmayan  serisi için  serisi durağan oluyorsa  serisine nci dereceden *bütünleşiktir* (*integrated*) denir

Herhangi bir  zaman serisi, .inci dereceden bütünleşik ise  serisi için  gösterimi kullanılır. Durağan zaman serisi için  gösterimi kullanılır.

Herhangi bir durağan AR(p) zaman serisi modeli  ve  olmak üzere,



şeklinde verilsin. Modelin beklenen değeri sıfır olsun. Aksi halde,  dönüşümü ile sıfır beklenen değerli modele geçiş yapılır. Bu serinin otokovaryans fonksiyonunu elde edelim. Önce serinin varyansı





eşitliğinden



olarak elde edilir. Benzer şekilde otokovaryans fonksiyonunun



olduğu



eşitliğinden açıktır. Buradan AR(p) modeli için Yule-Walker denklemleri



şeklinde yazılır. Bu denklem sistemi yardımı ile katsayılar verildiğinde otokovaryanslar ardışık olarak bulunabilir. Ayrıca,  için  otokovaryansları verildiğinde katsayılar da,



denklem sisteminin çözümleridir.

Şimdi, AR(2) modelini () ele alalım. Bu model için Yule-Walker denklemleri

, 

şeklinde olup , ve  için bu denklemler tekrar düzenlenirse,



eşitlikleri elde edilir. Son iki eşitlikten denklemler



şeklinde yazılabilir. Bu denklem sisteminin çözümleri ( ve ) de

 ve 

şeklindedir. Bu değerler birinci eşitlikte yerine konulduğunda, beyaz gürültü serisinin varyansı da katsayılar türünden



olarak bulunurr. AR(2) modelinde otokovaryansların hesaplanabilmesi için ilk iki otokovaryans ile beyaz gürültü serisinin varyansının bilinmesi yeterlidir. Diğerleri Yule-Walker denklemlerinden ardışık olarak elde edilir. Otokovaryanslar parametrelere bağlı olarak da bulunabilir. Yukarıdaki ikinci denklem  için,  olup birinci otokovaryans

 ya da 

olarak bulunur. Bu değer üçüncü denklemde yerine konursa  değeri de



şeklinde parametrelere bağlı olarak bulunur. Yukarıda, ’a bağlı olarak verilen  ve  nin değerleri birinci denklemde yerine konursa serinin varyansı da parametrelere bağlı olarak,



şeklinde olur. Böylece,



eşitlikleri yazılır. Bu değerler bulunduktan sonra diğer otokovaryanslar  ve  ye bağlı olarak ardışık şekilde hesaplanır.  ve  de parametreler türünden hesaplanabilir.  olduğundan birinci otokorelasyon  dir.  nin  türünden yazılması ile ikinci otokorelasyon da



şeklinde olur. Diğer otokorelasyonlar Yule-Walker denklemlerinden ardışık olarak bulunur.

 şeklinde verilen AR(2) modeli için otokorelasyonlardan bazıları











olarak hesaplanmıştır. Diğerleri de  eşitliğinden hesaplanır. Durağan serilerde otokorelasyonlar mutlak değerce azalır. Durağan değilse (örneğin,  gibi), otokorelasyonlar,









şeklinde hep sabit kalır. Bu da anlamlı değildir. Aslında, durağan olmayan bir serinin otokorelasyonları hesaplanamaz.

**Örnek 2.2.3** AR(2) zaman serisi modeli  olmak üzere,  olarak verilmiş olsun. Modelin durağanlığı  ve  katsayılarına bağlıdır.  ve  katsayılarının toplamı 1 ise seri durağan değildir. AR(2) zaman serisi modeline karşılık gelen karekteristik denklem  olup, köklerden en az biri mutlak değerce 1 ise model durağan değildir.  denklemin bir kökü ise karekteristik denklemi sağlar. Buradan,  denkliği elde edilir. O halde, katsayıların toplamı 1 ise model durağan değildir. Bu özellik daha yüksek dereceden AR serileri için de geçerlidir. Ayrıca, serinin durağanlığı karekteristik denklemin köklerinin mutlak değerce 1 den küçük olup olmaması ile ilgili olduğundan, negatif ( gibi) ve kompleks birim kökler için de aynı durum geçerlidir.

İkinci dereceden bir polinomun kökleri  ve 

 ve  .

şeklinde hesaplanır. Seri durağan ise her iki kök de mutlak değerce 1 den küçüktür. Yani, durağan AR(2) modeli için  ve  dir. O zaman  olup, ikinci dereceden bir polinomun köklerinin özelliklerinden (),  dir. Ayrıca, yine ikinci dereceden bir polinomun özelliklerinden (),



dir. Yani,  ve  eşitsizlikleri yazılır. Karekteristik denklemin kökleri reel ise  olacağı açıktır. Buna göre,



eşitsizliği yazılabilir. Buna göre katsayılar,  eşitsizliklerini sağlanması gerekir. Şimdi bunu görelim. Önce,

 ise 

dir. Buradan,  olup, ifadenin düzenlenmesi ile  eşitsizliği ve dolayısı ile  elde edilir. Eşitsizliğin diğer tarafı dikkate alındığında ise,



önermesi yazılabilir. Buradan ise,  eşitsizliğinde her iki tarafın karesi alınırsa  ve bu ifadenin de biraz daha düzenlenmesi ile  eşitsizliği elde edilir. Sonuçta,  şeklinde verilen AR(2) modelinin durağanlık koşulları



olarak da verilebilir. Kompleks kökler için de  olacak şekilde benzer işlemler yürütülür.

Durağan AR(2) zaman serisi modeli  şeklinde verildiğinde,  dir. Ayrıca model durağan olduğundan  olup  dir. Korelasyon tanımından  ve  olduğu açıktır.  in değeri parametreler türünden yerine yazıldığında



bulunur. Bunun sağlanabilmesi için çarpanların her ikisinin de aynı işaretli olması gerekir. Yani,



veya



dır. Model durağan olduğundan  dir. Dolayısı ile çarpanların her ikisi de pozitif olmalıdır. Yani,  ve  dır. Buradan da,  ve  elde edilir. Diğer taraftan, serinin varyansının pozitif, yani



olduğunu biliyoruz. Buradaki ifadede varyansın paydasındaki ikinci çarpanın pozitif () olduğunu da biliyoruz. Dolayısı ile,

,  veya , 

yazılabilir. Yani, ya ,  olmalıdır (bu sonuçtan  elde edilir) ya da ,  olmalıdır (buradan da  ve  sonucuna ulaşılır ki bu olamaz). Yani, durağan bir AR(2) modelinin katsayıları için ,  ve  eşitsizlikleri geçerlidir

Durağan AR serilerinde otokorelasyonlar mutlak değerlerce azalır. MA modellerinde olduğu gibi belli bir yerden sonra sıfır olmaz. Bu nedenle, otokorelasyonlar AR modellerinin derecesinin belirlenmesinde kullanışlı değildir. Aşağıda, AR modelinin derecesinin belirlenmesinde önemli bir araç olan kısmi otokorelasyon fonksiyonu incelenecektir.

**2.3. Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu**

 zaman serisi için,  ile  arasındaki korelasyon nci otokorelasyondur.  modelden çıkartıldığında (değerleri önceden bilindiğinde)  ile  arasındaki korelasyon serinin nci *kısmi otokorelasyondur*. Kısmi otokorelasyon fonksiyonu  ile gösterilecektir. Buna göre, zaman serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu



şeklinde koşullu otokorelasyondur.

**Tanım 2.3.1**  zaman serisi verildiğinde  nin  üzerine regresyonunda (bazen  nin  üzerine)  nin katsayısı serinin *nci kısmi otokorelasyonudur*

Tanımdan da anlaşılacağı gibi,  nin  üzerine regresyonundan birinci kısmi otokorelasyon  in katsayısıdır. Benzer şekilde ikinci kısmi otokorelasyon  nin  ve  üzerine regresyonunda  nin katsayısıdır (ikinci regresyonda  in katsayısı birinci kısmi otokorelasyon değildir). Yani, 10 tane kısmi otokorelasyon değerini hesaplamak için 10 tane regresyon çözümlemesi yapmak gerekir. Bu ise uzun ve zahmetlidir.

 nin  üzerine regresyonundan kestirim denklemi,



şeklinde yazılabilir. Burada,  için  katsayıları



hata kareler ortalamasının minimizasyonundan elde edilir.  için otokovaryanslara bağlı



denklem sistemi de yazılabilir. Denklem sistemi otokorelasyonlar türünden de  için



şeklindedir. Bu denklem sistemi matris formunda,



olarak yazılabilir.

Benzer şekilde,  nin ,… üzerine regresyonundan kestirim denklemi



olup,  için  katsayıları da



hata kareler ortalamasının minimizasyonundan elde edilir. Matris formunda ise,



şeklinde yazılabilir. Kolayca görüleceği gibi  için  dir. Buradan,  ile  arasındaki kısmi otokorelasyon,  ile  arasındaki bilinen otokorelasyon ile aynıdır.

 ile  arasındaki kısmi otokorelasyon  olsun. Buna göre,  ile  arasındaki korelasyon



olur. Ayrıca  nin varyansı,



şeklinde hesaplanır. Aradaki terimler



eşitliğinden dolayı sıfırdır. Buradan kestirim hatalarının varyansı için



yazılır.  için  olduğu kullanıldığında,  ile  arasındaki kovaryans



dir. Böylece, nci kısmi otokorelasyon için



formülüne ulaşılır. Buradan, Cramer kuralına göre  katsayıları



olarak hesaplanır. (Wei, 2006, s.13). Burada,



ve  matrisinin son kolonu ,  vektörü ile değiştirilerek  matrisi yazılır. Buradan da,  olacağından,



ve



olmak üzere kısmi otokorelasyon fonksiyonu



formülü ile verilebilir.