**1.6. Lineer Fark Denklemleri**

Lineer fark denklemleri zaman serilerinde önemli bir yer tutar. Bu kısımda lineer fark denklemleri fazla ayrıntıya girmeden incelenmeye çalışılacaktır.  herhangi bir zaman serisi olsun.  *gecikme operatörü* (bazen *gerileme operatörü*, *lag operatörü*, *backshift operator*)  şeklinde tanımlanır.  operatörü,  nin herhangi bir  anındaki değerini  anındaki değerine dönüştürür.  gecikme operatörü yerine bazen  de kullanılır.  fark operatörü de  yardımı ile  şeklinde tanımlanır. Buna göre,  serisinin birinci dereceden fark serisi , ikinci dereceden fark serisi de



şeklinde oluşturulur. Kolayca görüleceği gibi,



dir.  rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere,



şeklinde verilen denkleme *nci dereceden lineer fark denklemi* denir. Bu denklem,  için *lineer homojen fark denklemi* adını alır. Burada amaç, lineer fark denkleminin çözümünü bulmaktır. Bu denklem



olmak üzere,  şeklinde yazılabilir. Denklem sistemini çözebilmek için önce  homojen denklem sisteminin çözülmesi gerekir. Denklem istemlerinin çözümü için aşağıdaki Lemmalar (Wei, 2006) verilmiştir.

**Lemma** **1.6.1**  ve  homojen lineer fark denkleminin birer çözümü ise, herhangi  ve  sabitleri için  de sistemin bir çözümdür

**Lemma** **1.6.2** ,  homojen denklem sisteminin bir çözümü,  de  denklem sistemini sağlayan özel bir çözüm ise,  de  denklem sisteminin bir çözümüdür

**Lemma** **1.6.3 ** olsun. Bu durumda herhangi bir  (sabit) ve  için  homojen denklem sisteminin bir çözümüdür.

**İspat** Önce  için iddianın doğruluğunu görelim.  bu denklem sistemini sağlar (). Şimdi iddianın  için doğru olduğunu varsayalım. Yani,  için  bir çözüm () olsun. Göstermeliyiz ki,  için  bir çözümdür. Bunun için,

****

eşitliği elde edilir. Bu son ifadede  nin kuvvetleri hep  den küçüktür. Varsayımdan dolayı bu ifade sıfırdır ( için ). Dolayısı ile, **** sağlanır

**Lemma 1.6.4** **** ve  için  bir çözüm olsun.  sabitler olmak üzere,  genel çözümdür.

**İspat** 

olup bu işlem devam ettirilirse,



bulunur (). Bu da ispatı tamamlar

Fark denklemlerinin çözümlerini bulmak için aşağıdaki temel teoremi ifade edebiliriz.

**Teorem 1.6.1**  homojen denklem sistemi verilmiş olsun.  ve  denkleminin tekrar eden ( tane) kökleri  olmak üzere  şeklinde yazıldığında,  dir. Bütün  ler için  ve  kökleri farklı ise  dir

Reel değerli homojen lineer fark denkleminin kökleri bazen kompleks olabilir. Denklem kompleks kök içeriyorsa, konjügesi (eşlenik,  ise  nin konjügesi  dir) de aynı denklem sisteminin bir köküdür. Kompleks kökler her zaman kutupsal formda yazılabilir. Yani,  ve  olmak üzere,  kompleks sayısı



olarak yazılabilir. Buradan,  olduğundan homojen denklem sisteminin çözümleri,

, 

gibi terimler içerir. Örneğin ikinci dereceden lineer homojen denklem sistemi



şeklinde verilmiş olsun.  diyelim ve köklerin,

 ve  şeklinde olduğunu varsayalım. Teorem (1.6.1) gereğince çözüm,



şeklindedir. Burada,  herhangi (kompleks) sabitlerdir. Reel değerli süreçler için  sabitler olmak üzere çözümler,



şeklindedir.  ve  birbirlerinin kompleks konjügesi olacağından,  ve  olmak üzere,



şeklinde her zaman reeldir.

**Örnek 1.6.1** **a)**  homojen fark denklemini ele alalım.  dan  dir. Her iki kök de 1 dir. Yani kökler tekrar etmektedir. O halde çözüm, Teorem (1.6.1) gereğince  dir.

**b)**  homojen fark denkleminin çözümünü bulalım. Buna göre,

 

olup,

,



yazılır. Buradan, ,  ve dir. Burada,  ise,  olup pay ve payda  ile çarpıldığında, bulunur. Kutupsal koordinatlarda ise

 ve 

olup çözüm Teorem (1.6.1) geregince,



dir

**Örnek 1.6.2**  ikinci dereceden homojen olmayan fark denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin, homojen kısmı  dir. Ayrıca,  olmak üzere, homojen denklem  olarak yazılır. Homojen denklemin karekteristik denklemi  olup köklerini  ve  ile gösterelim. Çözüm,  ve  nin durumuna göre değişir. Yani,

i)  reel ve 

ii)  reel ve 

iii)  ve  kompleks

durumlarına göre çözümler sırası ile,

,  ve 

şeklindedir (Fuller, 1996, s. 47). Burada önemli olan  ve  katsayılarının belirlenmesidir. Şimdi, (i) durumunu inceleyelim.  mutlak değerce  den küçük olsun. O zaman  denklem sistemi,



şeklinde yazılabilir. Buradan,  ve  için çözümün,



şeklinde olduğu ,  ve  nin açık olarak yazılması ile elde edilir. Yani,







eşitlikleri taraf tarafa toplandığında,



eşitliği elde edilir. Bunun bir özdeşlik olduğu dikkate alındığında, eşitliğin sol tarafının  olabilmesi için, ,  ve  için,  eşitliklerinin sağlanması gerekir.

Homojen fark denklemin () karekteristik denklemi,  olup kökler  ve  olduğundan çözüm,  şeklindedir. İki çözüm,  ve  de denklem sistemini sağlar. Bunlar denklemde yerine konursa,



olduğu görülür ( denklemin bir köküdür). Benzer şekilde,  de denklemi sağlar.

Şimdi de kökler reel ve  olsun. Bu köke  diyelim. O zaman çözümlerden biri  diğeri  dır. Birinci çözümün denklemi sağladığını gördük. Şimdi ikinci çözümün de denklemi sağladığını görelim. Yani,  denklem sistemini sağlamalı. İkinci çözüm denklemde yerine yazılırsa,

elde edilir. Burada,  denklemin kökü olduğundan  dir. İkinci dereceden bir polinomun köklerinin özelliklerinden,

 ve 

dir. O halde,



olup, ikinci çözüm de denklemi sağlar.

Son olarak, örneği biraz sayısallaştıralım. Yani, ikinci dereceden fark denklemi,  olarak verilmiş olsun. Bu durumda karekteristik denklem,  olup kökler,  ve  dır. Yani her iki kök de reel ve mutlak değerce  den küçüktür. O zaman ,



şeklinde yazılabilir. Katsayılar ,  ve  için,  eşitliklerini sağlar. Buradan, genel çözüm,  şeklindedir. Katsayıların hesabı için  ve  başlangıç koşulları uygulandığında, iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir.  ise  ve  için  eşitlikleri yazılır. Buradan da iki bilinmeyenli iki denklem  ve  şeklinde olur. Bu iki denklemin çözümünden katsayılar ,  olarak bulunur. Dolayısı ile, genel çözüm  olarak elde edilir

**1.7. Problemler**

**1.7.1** Aşağıda satırlar halindeki verilere



şeklinde bir regresyon modelinin uygun olduğunu varsayalım.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 94 | 92 | 91 | 90 | 87 | 86 | 85 | 86 | 87 | 91 |
| 94 | 97 | 98 | 99 | 101 | 103 | 106 | 108 | 112 | 113 |
| 114 | 117 | 120 | 121 | 123 | 124 | 124 | 123 | 124 | 124 |
| 125 | 127 | 127 | 126 | 124 | 122 | 120 | 119 | 117 | 115 |
| 112 | 109 | 108 | 107 | 107 | 105 | 105 | 103 | 102 | 102 |

***a*)** Model parametrelerini en küçük kareler yöntemine göre tahmin ediniz. ANOVA tablosunu oluşturup  değerini hesaplayınız.

***b*)**  yokluk hipotezini  alternatif hipotezine karşı  anlam düzeyinde test ediniz. parametresi için %95 lik güven aralığı yazınız.

**1.7.2**  ler beklenen değeri sıfır, varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenler olsun.  olmak üzere,



şeklinde verilen regresyon modelini göz önüne alalım. ,  ve  parametrelerinin en küçük kareler tahmin edicilerini bulunuz.

**1.7.3**   basit doğrusal regresyon modelini göz önüne alalım.  için

 ve 

şeklinde iki tahmin edici önerilmiştir. Her iki tahmin edicinin de  için yansız ve  olduğunu gösteriniz.

**1.7.4**  ve  ler birbirinden bağımsız beklenen değerleri  varyansları  olan bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere,



şeklinde verilen zaman serisi durağan mıdır? Eğer durağan ise, zaman serisinin otokorelasyon fonksiyonunu elde ediniz. Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

**1.7.5** Herhangi bir  zaman serisine ait 10 gözlem değeri aşağıdadır.  için  otokorelasyonlarını hesaplayınız.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**1.7.6** Üç boyutlu bir zaman serisi modeli  şeklinde verilmiş olsun. Modeldeki  matrisi



olarak verildiğinde,  nın öz değerlerini bulunuz. Ayrıca,  olacak şekilde  ve  matrislerini hesaplayınız.  diyelim. Bu durumda,  olacak şekilde  ve  matrislerini (veya vektörlerini) bulunuz.

**1.7.7**  ler beklenen değeri  varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere, üç boyutlu zaman serisinin bileşenleri

 ,  , 

olarak verilmiş olsun.  zaman serisi durağan mıdır? Eğer durağan ise, serinin otokovaryans matrisini hesaplayınız.

**1.7.8** Aşağıdaki fark denklemlerinin genel çözümlerini elde ediniz. Her bir çözüm için,  değerini  ve  için hesaplayınız.

***a*)** 

***b*)** 

***c*)** 

**1.7.9** Herhangi bir fonksiyon,



olarak tanımlansın.  nin durağan bir zaman serisinin otokorelasyon fonksiyonu olabilmesi için  nın tanım aralığını elde ediniz.

**1.7.10**  için  standart normal dağılıma sahip ( ve ) rasgele değişkenler olsun.

***a*)**  ve  zaman serileri durağan mıdır? Durağan olanların otokovaryans fonksiyonunu elde ediniz.

***b*)** 

şeklinde tanımlanan  durağan mıdır?