**2.4. Otoregresif Hareketli Ortalama (ARMA) Serileri**

MA ve AR modellerinde gözlendiğinin aksine, otokorelasyonlar ve kısmi otokorelasyonlar belli bir yerden sonra sıfır olmayabilir. Bu tür seriler *otoregresif hareketli ortalama* (ARMA) serileridir.



olmak üzere, AR(p) modeli  şeklinde, MA(q) modeli de



olmak üzere,  olarak verilmişti. Otoregresif hareketli ortalama modeli, bu iki zaman serisi modelinin birleştirilmiş hali olup



şeklinde verilir. MA modelleri her zaman durağan olduğundan ARMA modellerinin durağanlığı AR kısmının durağanlığı ile ilgilidir. Dolayısı ile,  olarak verilen ARMA(p,q) modeli



karekteristik denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1 den küçük ise durağandır. Bilindiği gibi, durağan her zaman serisi modeli  olarak yazılabilir. Yani,  olmak üzere, beklenen değeri  olan ARMA(p,q) zaman serisi modeli



şeklinde verildiğinde, zaman serisi modeli durağan ise



şeklinde yazılabilir. ARMA(p,q) modeli için  şeklinde yazıldığında  zaman serisi,



olarak yazılabilir. Burada  katsayıları,  olmak üzere,



özdeşliğinden bulunur.  için  ve  için  olduğunu biliyoruz. Buradan çözümler (Brockwell ve Davis, 1987)



şeklindedir. Çözümlerden ilk üç tanesi



olarak hesaplanmıştır. Diğer katsayılar da ardışık olarak elde edilir.

**Örnek 2.4.1**  olmak üzere, ARMA(2,1) zaman serisi modeli,  şeklinde verilsin. Modelin AR kısmına karşılık gelen karekteristik denklem  olup, kökleri  ve  olduğundan model durağandır. O halde, verilen ARMA(2,1) modeli  olarak yazılabilir. Yani, ARMA(2,1) zaman serisi modeli



şeklinde ifade edilebilir. Buradan  katsayıları,

, 

başlangıç koşulları ile  için  homojen fark denkleminin çözülmesi ile bulunur.  ve  kökleri ile, genel çözümün,  şeklinde olduğunu biliyoruz.  ve  başlangıç koşulları kullanılarak  ve  katsayıları için  ise  ve  ise  denklemleri yazılır. Buradan katsayılar,  ve  denklem sisteminin çözümleridir. Bu denklemlerin çözümünden katsayılar  ve  olup genel çözüm,  olarak elde edilir. O halde, verilen ARMA(2,1) zaman serisi modeli



şeklinde ifade edilir. Şimdi, zaman serisi modelinin başlangıçta



şeklinde verildiğini düşünelim. Böyle verilen  zaman serisi modelinin, ARMA(2,1) şeklinde, yazılabileceğini görelim. Bunun için,  ve  zaman serileri

 ve 

şeklinde yazıldığında, eşitliğin sol tarafı  olacak şekilde düzenlenirse,









eşitlikleri elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplandığında,



elde edilir. Yani, ARMA(2,1) olarak verilen  zaman serisi modeli  olarak yazılabilir.  katsayıları belirlenirse otokovaryans fonksiyonu  şeklinde olur. Burada, otokovaryans fonksiyonunun hesaplanabilmesi için (sonsuz toplam ile beklenen değerin yer değiştirebilir)  olması gerekir. Otokovaryans fonksiyonu  katsayılarının yerine konulması ile,



olarak bulunmuştur. Buradan otokorelasyon fonksiyonu da,



şeklinde olur. Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonların bazıları hesaplanarak aşağıda tablo halinde verilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 1.00 | 0.95 | 0.835 | 0.7055 | 0.58315 | 0.475895 |
|  |  | 0.95 | -0.6923 | 0.41 | -0.29 | 0.225 |

Kısmi otokorelasyonlardan da ilk üç tanesi aşağıda hesaplanmıştır. Önce  olduğu açıktır.  için  ve  matrisleri ile bu matrislerin determinantları





şeklinde olup,  nin değeri  dür.  için  ve  matrisleri ve determinantları da

 

olup,  dir. Her iki fonksiyon da mutlak değerce azalmasına rağmen, ne otokorelasyonlar ne de kısmi otokorelasyonlar belli bir noktadan sonra sıfır değildir

Yukarıda bahsedildiği gibi, ARMA modelleri AR ve MA modellerinin karışımıdır. ARMA modelleri MA bileşeni içerdiği için kısmi otokorelasyon fonksiyonu,  ve  denklemlerinin köklerine bağlı olmak üzere sinüs dalgalanmaları gösterir. Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi, kısmi otokorelasyonlar mutlak değerce azalmasına rağmen, bir dalgalanma göze çarpmaktadır.

**Örnek 2.4.2**  olmak üzere  şeklinde verilen ARMA(1,1) modelini ele alalım. AR kısmının karekteristik denkleminin kökü  olup,  ise seri durağandır. Buradan,  ise verilen ARMA(1,1) modeli



şeklinde  modeli olarak yazılabilir.  eşitliğinden,



olup  olacağından



özdeşliği elde edilir. Bu özdeşlik



şeklinde düzenlenebilir. Özdeşlik çözüldüğünde  başlangıç koşulu ile  için  şeklinde birinci dereceden homojen fark denklemi yazılır.  başlangıç koşulu altında genel çözüm  dir. Çözüm  için,  şeklindedir.

Şimdi  ve  alalım ve ARMA(1,1) zaman serisi modelini  olarak yazalım. Modelin her iki tarafı  ile çarpılarak



eşitliği yazılabilir. Buradan her iki tarafın beklenen değeri alınırsa,



elde edilir.  olduğundan, otokovaryans fonksiyonu



haline gelir.  için  olup  yerine  yazılırsa,



elde edilir. Buradan da  elde edilmiş olur. Benzer şekilde,  için  olup bu eşitliklerden serinin varyansı  olarak bulunur. Diğer taraftan,  dir.  değeri yerine konursa, birinci kovaryans  ve  için  dır. Dolayısı ile serinin otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları,

 , 

şeklindedir. Kısmi otokorelasyonlardan birkaç tanesi aşağıda hesaplanmıştır. Önce,  olduğu açıktır.  ikinci kısmi otokorelasyon için  ve  matrisleri ile bunların determinantları



olarak hesaplanmış  olarak bulunmuştur. Üçüncü kısmi otokorelasyonu için  değerinin hesaplanması gerekir.  için  eşitliğinden  dır. Buradan,  için  ve  matrisleri ile bunların determinantları sırası ile





dur. Üçüncü kısmi otokorelasyon değeri de  şeklinde bulunmuştur. Görüldüğü gibi, hem otokorelasyonlar hem de kısmi otokorelasyonlar mutlak değerce olarak azalmaktadır

Zaman serilerinde otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları, serilerin model derecelerinin belirlenmesinde kullanılmaktadır. Diğer taraftan, otokorelasyonların azalma hızına bakılarak serinin durağanlığı hakkında sezgisel sonuçlar gözlenir. Seri durağan ise, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları hesaplanabilir. Seri durağan değilse, otokorelasyon fonksiyonundan söz edilemez.

**Örnek 2.4.3**  olmak üzere,  zaman serisi modelini göz önüne alalım. Bu model durağan değildir. Yani, otokorelasyon fonksiyonundan bahsedilemez. Bir an için durağan olduğunu varsayalım. O zaman, otokovaryans fonksiyonu,



şeklinde olmalıdır. Serinin her iki tarafı  ile çarpıldığında,



elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının beklenen değeri alındığında ise,



bulunur. Buradan otokovaryans fonksiyonunun tanımından



eşitliği yazılır.  için,  olduğundan



eşitliği elde edilir. Ayrıca,  ve



olup serinin varyansı için



eşitliği elde edilir. Diğer taraftan,  değeri  yazılarak



olarak bulunur. Buradan,  ve  eşitlikleri yazılır. Bu eşitliklerin sağlanabilmesi için  olması gerekir. Bu ise bir çelişkidir. Örnekten de görüldüğü gibi durağan olmayan seriler için otokorelasyon fonksiyonu tanımlı değildir

Aşağıda, ARMA modellerine uygun rasgele üretilen serilerin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının değerleri Splus paket programı ile hesaplanmış ve grafikleri çizilmiştir.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 1.00 | 0.3480 | 0.3002 | 0.3256 | 0.1238 | -0.0007 |
|  |  | 0.384 | 0.2038 | 0.2036 | -0.0084 | -0.1597 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 1.00 | 0.9726 | 0.9185 | 0.8475 | 0.7691 | 0.6911 |
|  |  | 0.9726 | -0.5065 | -0.1404 | 0.0108 | 0.0564 |

**Örnek 2.4.4**  olmak üzere ARMA(2,1) zaman serisi modeli  şeklinde verilmiş olsun. Modelin AR kısmının karekteristik denklemi  olup kökleri () tekrar etmektedir. Her iki kök mutlak değerce 1 den küçüktür. Buna göre, seri durağan olup  modeli gibi yazılabilir. Yani, verilen ARMA(2,1) modeli,



şeklinde yazılabilir. Buradan, serinin otokovaryans fonksiyonu



olup, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonların hesaplanabilmesi için  katsayılarının bulunması gerekir. Bunun için,



eşitlikleri taraf tarafa toplandığında,



elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı  olacağından,  ve  başlangıç koşulları ile  için  homojen fark denklemi yazılır. Homojen denklemin kökleri tekrar ettiğinden genel çözüm  şeklinde olup başlangıç koşulları kullanıldığında, genel çözüm için katsayılar  ve  olarak bulunur. Yani genel çözüm,  dir. Dolayısı ile serinin otokovaryans fonksiyonu,





otokorelasyon fonksiyonu da  şeklindedir. Otokorelasyon fonksiyonunun bazı değerleri ve grafiği aşağıdadır.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 1.0 | 0.92 | 0.74 | 0.56 | 0.40 | 0.28 | 0.19 | 0.13 | 0.088 | 0.058 | 0.038 |

|  |  |
| --- | --- |
| UNTITLED-10 | Otokorelasyon fonksiyonu analitik bir olarak ifade edilebildiğinde fonksiyonun grafiği dikey çizgiler şeklinde verildiği gibi fonksiyonun genel yapısını görebilmek için yan tarafta verilen şekilde de ifade edilebilir. |

**2.5. Mevsimsel Zaman Serileri**

Mevsimsel zaman serilerinde öncelik, uygun fark ve dönüşümün belirlenmesidir. Bir zaman serisinin günlük, haftalık, aylık, yıllık gibi birim zamanda gözlenen verilerin bir kümesi olduğunu söylemiştik. Genellikle, aylık veriler yerine, deneyin özelliğine göre farklı periyodlarda da gözlemler toplanır. Bununla birlikte, aylık olarak toplanan veriler de periyodik bir dalgalanma gösterebilir. Örneğin, dondurma tüketimi yaz aylarında artar. Dolayısı ile, Agustos ayındaki dondurma tüketimi, bir önceki yılın Ağustos ve Temmuz aylarındaki dondurma tüketimi ile ilişkili olabilir.

Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarından model derecelerinin belirlenmesi bazen kolay olmayabilir. Bazı durumlarda, otokorelasyonlar periyodik artan veya azalan bir davranış gösterebilir.

 olmak üzere,

, 

zaman serisi modelini göz önüne alalım. Böyle bir model aylık olarak toplanan verilere uygulanabilir.  ve  için en son Aralık ayına ait gözlem değeri  ise önümüzdeki yılın Aralık ayının öngörü değeri  olarak alınabilir. Bir sonraki Aralık ayına ait öngörü ise  olur. Böylece, .nci yılın Aralık ayının öngörüsü  şeklinde hesaplanabilir. Bu modele göre, Aralık ayına ait bir öngörü geçen yılın Aralık ayından etkilenir.

 için, serinin beklenen değeri ( parametresi) modelden düşer ve  şekline dönüşür. Bu modele karşılık gelen karekteristik denklem  olup köklerin hepsi mutlak değerce 1 dir. Buradan,  dönüşümü seriyi durağan hale getirir.

 pozitif bir tamsayı olmak üzere mevsimsel zaman serisi modeli,



şeklinde verilmiş olsun. Burada , serinin mevsimsel (seasonality) gecikmesidir. Modelin karekteristik denklemi  olup, denklem AR(1) modelinin karekteristik denklemine benzemektedir. Bu model  şeklinde ifade edilir. Örneğin,  ve  için model  şeklinde olup, karekteristik denklem,  dır. Model  şeklinde ise karekteristik denklemi,  dir.  dönüşümü ile karekteristik denklem AR(2) modelinin karekteristik denklemi () ile aynıdır. Böylece model  ile ifade edilmelidir. Genellikle,  durumları ile karşılaşılır.

Pratikte çok karşılaşılan  modelini, ( veya  alarak ) göz önüne alalım. Bu model,  için durağandır. Otokovaryans fonksiyonu da,



şeklindedir. Burada,  gösterge fonksiyonu olup  için , diğer durumlarda  değerlerini alır. Otokovaryanslar



Yule-Walker denklemleri yardımı ile,

 ve  için  olmak üzere,

ve 

eşitliklerinden hesaplanır. Ancak,

 

olduğundan eşitliklerin sağlanabilmesi için  olması gerekir. Diğer taraftan serinin varyansı



eşitliğinden  olarak elde edilir. Diğer otokovaryanslar;

, 











biçimindedir. Genel halde otokovaryans fonksiyonu,



şeklindedir. Otokorelasyon fonksiyonu ise  eşitliğinden



olarak yazılır. Buna göre, otokorelasyonlar periyodik olarak azalır, kısmi otokorelasyonlar  ve  için  dır. Fonksiyonların grafikleri Örnek (2.3.2b) de verildiği gibidir.

Durağan zaman serisi modeli  olmak üzere,



olarak verilmiş olsun. Bu şekilde verilen modelin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları aşağıdadır. Otokovaryans fonksiyonu,



eşitliğinden



şeklinde yazılır. Otokovaryansların bazıları



 

olarak hesaplanmıştır. Bu eşitliklerin sağlanabilmesi için,  için (tek değerler)  olacağı açıktır. Yukarıdaki denklemlerden,



dir. Eşitliklerden parametreler arasında  şeklinde bir bağıntının olduğu  eşitliğinden açıktır.

Seri durağan olduğundan dolayı,  olmalıdır. Diğer taraftan,



denklemi düzenlendiğinde,  elde edilir. Buradan da  ya da  bulunur. Seri durağan olduğundan her ikisi de olamaz. O halde  olmalıdır. Model durağan olduğundan  dir. Ancak,  olduğu da gösterilmelidir. Bunun için, karekteristik denklem ()  yazılarak tekrar düzenlenirse  şekline dönüşür. Model durağan olduğundan denklemin bütün kökleri ( ve ) mutlak değerce 1 den küçüktür. O halde,  olmalıdır. Yani,  olup  dir. Sonuç olarak  nin tek değerleri için  dır. Diğerleri için aşağıdaki üç denklemi ele alalım:





.

Bu eşitliklerden  ve  değerlerinin çözümü için



denklem sistemi yazılır. Bu denklem sisteminin çözümleri

 ve 

olup bu çözümler  eşitliğinde yerine konulursa, beyaz gürültü serisinin varyansı,



olarak hesaplanmış olur. Otokovaryanslar parametrelere bağlı olarak da hesaplanabilir. İkinci otokovaryansın  olduğu  eşitliğinden açıktır. Bu üçüncü denklemde yerine konursa  değerleri ’e bağlı olarak



eşitliğinden



şeklinde bulunur. Bunlar birinci denklemde yerine yazıldığında ise serinin varyansı parametreler türünden



şeklinde olur. Buradan,



eşitlikleri elde edilir.  ve otokorelasyonları da



 dan 

dir. Diğer otokorelasyonlar da  eşitliğinden hesaplanır.

**Örnek 2.5.1**  olmak üzere  modeli,



şeklinde verilmiş olsun.  denkleminin kökleri mutlak değerce 1 den küçük olduğundan model durağandır.  ve  olup, bu iki değerin bilinmesi ile bütün otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlar hesaplanabilir. Bunlardan iki tanesi





olup  nin tek değerleri için  dır. Diğer otokorelasyonlar da  eşitliğinden hesaplanır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | 1 | 0 | 0.887 | 0 | 0.736 | 0 | 0.596 | 0 | 0.480 | 0 | 0.385 |

Model, AR(4) gibi olup kısmi otokorelasyonlar  ve  için  şeklindedir. Ayrıca  dır.  için  ve  matrisleri ve bu matrislerin determinantları





şeklinde olup, ikinci kısmi otokorelasyon  dir. Üçüncü kısmi otokorelasyon için  ve  matrisleri ve bu matrislerin determinantları,





olup,  olduğu görülür

Bilindiği gibi zaman serilerinde durağanlık en önemli araçtır. Seri durağan değil ise istatistiki sonuç çıkarımlar için seri durağanlaştırılır. Durağan olmayan seriler arasında (bir çok iktisadi seride olduğu gibi) birim köklü seriler geniş bir yer tutar. Hareketli ortalama serileri her zaman durağan olup, otoregresif serilerin durağanlığı karekteristik denklemin köklerine bağlıdır. Karekteristik denklemin köklerinden en az bir tanesi mutlak değerce 1 ise bu tür seriler *birim köklü* seriler olup, fark alma yöntemi ile seri durağanlaştırılır. Serinin kaç defa farkının alınacağı ise, serinin birim köklerinin sayısı ile ilgilidir. Örneğin, model



şeklinde ise, karekteristik denklemin kökleri  ve  olup bir tane kök mutlak değerce 1 dir. Buna göre;  şeklinde birinci dereceden fark ile seri durağan hale gelir. Model



verildiğinde, karekteristik denkleminin kökleri  ve  dir. Böylece, 2 tane birim kök vardır. O zaman seriyi durağan hale getirmek için 2 defa fark almak gerekir.  şeklindeki  ikinci derece fark serisi durağandır.

Mevsimsel serilerde durum biraz farklıdır. Aradaki farkı görebilmek için  şeklinde verilen  modelini ele alalım. Bu modele karşılık gelen karekteristik denklem  olup  ise seri durağandır. Aksi halde durağan değildir. Durağan olması durumunda serinin otokorelasyon fonksiyonu,



şeklindedir.  için model durağan değildir. Bu durumda karekteristik denklem  olup, eşitlik



şeklinde yazılabilir. Buradan,  ve  eşitlikleri yazılır ve  denkleminin kökleri de



şeklinde kompleks sayılardır. Ayrıca,



dir (bir kompleks sayı  şeklinde verilmiş ise,  dir). Bütün kökler mutlak değerce 1 olduğundan serinin durağanlaştırılması için 3 defa fark alınması gerekir. Oysa,  dönüşümü seriyi daha karmaşık hale getirir. Mevsimsel fark alarak da seri durağan hale getirilir. Mevsimsel fark operatörü  şeklindedir.  için,  dönüşümünden  elde edilir. Bu seri ise durağandır.

**Örnek 2.5.2**  olmak üzere,  mevsimsel zaman serisi modeli  olarak verilmiş olsun. Modelin karekteristik denklemi  olup kökleri sırası ile

,  ve 

şeklindedir. İki tane kök mutlak değerce  olduğundan ikinci dereceden fark serisinin durağan olması gerekir. Model açık yazıldığında,



elde edilir. Bu durumda,



eşitlikleri taraf tarafa toplandığında,  durağan olmayan zaman serisine ulaşılır. Oysa,  dönüşümü () seriyi durağan hale getirir

**Örnek 2.5.3**  modeline uygun rasgele üretilen 100 verinin grafikleri aşağıdadır.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Otokorelasyon Fonk. | Kısmi Otokor. Fonk. |
|  |  |  |

 modeli başlangıçta regresyon modeline benzer. Model,  şeklinde yazılarak parametre tahminleri ve ilgili istatistiki değerleri hesaplanarak aşağıda verilmiştir.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Parametre | Tahmin | Standart Hata | t-istatistiği | p-değeri |
|  | 0.193 | 0.113 | 1.707 | 0.0902 |
|  | 0.813 | 0.059 | 13.702 | 0.0001 |

 regresyon denklemini için  parametresine ait tahmin değeri ile ilgili istatistiklerin değerleri de aşağıdadır.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Parametre | Tahmin | Standart Hata | t-İstatistiği | p-değeri |
|  | 0.867 | 0.0509 | 17.020 | 0.0001 |

Grafikler incelendiğinde, tahmini otokorelasyonlar periyodik olarak azalmakta, üçüncü kısmi otokorelasyon güven aralığının dışında (bir hayli büyük) diğer kısmi otokorelasyonlar güven aralığının içindedir (sıfıra yakın). O halde, böyle bir seri  olarak modellenebilir. Yukarıdaki modele göre otokorelasyon fonksiyonunun bazı değerleri ile hesaplanan otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları aşağıdaki gibidir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 0 | 0 | **0.9** | 0 | 0 | **0.81** | 0 | 0 | **0.729** |
|  | 0.138 | 0.173 | **0.804** | 0.099 | 0.168 | **0.616** | 0.063 | 0.197 | **0.400** |
|  | 0 | 0 | **0.9** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0.138 | 0.156 | **0.797** | -0.041 | -0.054 | -0.080 | -0.016 | 0.126 | -0.196 |

Bu tabloya göre, fonksiyonların gerçek değerleri ile hesaplanan değerleri arasında bir benzerlik vardır.  olarak gözlenmiş olup fonksiyon değeri  dır. Önemli olan ise  değerinin belli bir güven sınırı içinde kalmasıdır

Bu kısımda AR türü mevsimsel zaman serisi modelleri ele alındı. Aslında MA veya ARMA türü mevsimsel modeller de ele alınabilirdi. Burada, aksi söylenmedikçe mevsimsel seriler denildiğinde AR türü mevsimsel zaman serileri anlaşılacaktır.