**6.2. Vektör Otoregresif Seriler (VAR Modelleri)**

İkinci bölümde, tek değişkenli hareketli ortalama (MA(q) serilerinden hareketle otoregresif zaman serisi modellerine geçiş yapılmıştı. Sonlu her  doğal sayısı için MA(q) modelinin durağan olduğunu biliyoruz. Durağan her ARMA(p,q) modeli de  şeklinde yazılabilir.  modelinin katsayıları özel olarak seçilerek, ARMA(p,q) modeline geçiş de yapılabilir. Çok değişkenli zaman serisi modellerinde bu geçişler biraz karmaşıktır.

Birinci dereceden vektör otoregresif (VAR(1)) zaman serisi modeli,  ve  da uygun boyutta bir matris olmak üzere,



olarak verilir. Tek değişkenli zaman serilerinde olduğu gibi model  şeklinde yazılmak istenirse,  bir dizi ardışık işlemden sonra,

şeklinde yazılabilir. Bu yazılış ilk bakışta anlamlı ve kolay gibi görünmesine rağmen, işlemlerin yürütülmesi zordur. Bu ifade, bazı matris özellikleri yardımı ile biraz daha kolay hale getirilebilir. Herhangi bir  matrisinin,  şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Burada ,  nın özdeğerlerinden oluşturulan (özdeğerler farklı ise diagonal) bir matris,  da  nın öz vektörlerinden oluşturulan matristir.  matrisi tek değildir.  dönüşümü ile,



eşitliğinden  modeline ulaşılır. Bu da modelin kanonik formudur.  matrisi (genellikle) diagonal olduğundan, bu gösterim serinin bileşenlerinin ayrı ayrı incelenmesine olanak sağlar. Ayrıca,  ters dönüşümü ile başlangıçtaki modele dönülebilir.  serisi durağan ise herhangi bir lineer birleşimi de durağan olacağından,  de durağandır. Dolayısı ile, serinin durağanlığı  matrisinin özelliklerine bağlıdır.  nın bütün öz değerleri mutlak değerce 1 den küçük ise verilen çok değişkenli zaman serisi modeli durağandır. Aksi halde durağan değildir.

 şeklinde verilen VAR(1) modeline karşılık gelen karekteristik denklem  dir. Benzer şekilde VAR(p) modeli,  olmak üzere,



olup karekteristik denklemi,



şeklindedir.

**Örnek 6.2.1** İki değişkenli birinci dereceden vektör otoregresif zaman serisi modeli  olmak üzere,



olarak verilmiş olsun. Bu modele karşılık gelen karekteristik denklem,



olup, kökler (öz değerler)  dir. Buna göre, öz değerlerden biri 1 olduğundan model durağan değildir. Öz değerler matrisi,



olup,  matrisi, bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörlerden oluşturulur. Bu öz vektörleri  ve  ile gösterelim.  öz değerine karşılık gelen öz vektör,  eşitliğinin çözümünden elde edilir. Buna göre,  matrisinin birinci sütun vektörü,  için,



denklem sisteminin çözümünden bulunur. Denklem sisteminin çözümü tek değildir. Çözüm için  denirse,  olur. Buradan,  öz değerine karşılık gelen öz vektör,  dir.  öz değerine karşılık gelen ikinci öz vektör için de  denklemi çözülür. Bu



denklem sisteminin çözümünden (yine tek değildir) elde edilir.  denirse  olur. Yani ikinci öz vektör,  dür. Buradan da,  matrisinin ikinci sütun vektörü belirlenmiş olur. Böylece ,  ve  matrisleri sırası ile,

 ,  ve 

şeklinde bulunmuş olur. Kolayca görüleceği gibi,



dır.  dönüşümü ile serinin kanonik formu,  olur.  matrisi diagonal olduğundan kanonik formun bileşenleri,

 

şeklinde yazılabilir. Bu bileşenler tek değişkenli zaman serileri olup  nin birim köklü,  nin ise durağan olduğu açıktır. Başlangıçtaki seriye,



şeklinde dönüş yapılabilir. Burada,  nin her iki bileşeni durağan olmayan  nin fonksiyonudur. Dolayısı ile,  iki değişkenli zaman serisi durağan değildir. Buna göre, durağan olmayan iki değişkenli VAR(1) modelinin her iki bileşeni ( ve ) de durağan değildir. Diğer taraftan,  için  tek değişkenli zaman serisi



şeklinde yazılabilir.  durağan olduğundan,  de durağandır. Sonuç olarak,  serisinin kendisi durağan olmamasına rağmen,  durağan olacak şekilde bir  vektörü vardır

Bu örnekte de görüldüğü gibi, herhangi bir çok değişkenli zaman serisi durağan değil ise, her bir bileşeni de durağan değildir. Ancak, bu önermenin tersi doğru değildir. Yani, bileşenleri ayrı ayrı durağan olan çok değişkenli zaman serisi durağan olmayabilir (Örnek 1.5.1).

**Tanım 6.2.1** Durağan olmayan herhangi bir  çok değişkenli zaman serisi için  durağan olacak şekilde bir  vektörü varsa,  serisine *kointegrasyonludur* (*eşbütünleşiktir*) denir.  vektörüne de kointegrasyon vektörü denir

Örnek (6.2.1) de iki değişkenli  zaman serisi durağan olmamasına rağmen,  için  durağandır. Yani,  zaman serisi modeli  kointegrasyon vektörü ile kointegrasyonludur. Burada, kointegrasyon vektörünün tek olmadığını da belirtelim.  durağan ise singüler olmayan herhangi bir  matrisi için,  de durağandır. Buna göre,  de başka bir kointegrasyon vektörüdür. Yani, kointegrasyon vektörü tek değildir. Ancak, birbirinden lineer bağımsız kointegrasyon vektörlerinin sayısı önemlidir. Lineer bağımsız kointegrasyon vektörlerinin sayısı, kointegrasyon vektörünün tahmini ve verilen herhangi bir çok değişkenli zaman serisinin kointegrasyonlu olup olmadığının sınanması açısından önemlidir.

değişkenli VAR(1) zaman serisi modeli  olmak üzere,  şeklinde verilmiş olsun. Seri durağan ise, istatistiki sonuç çıkarım açısından problem yoktur. Ancak seri durağan değilse, sonuç çıkarımlar için serinin durağanlaştırılması gerekir. Bunun için de serinin farkı alınır. Modelin her iki tarafından  çıkartılırsa,  olmak üzere model,



şeklinde yazılabilir. Burada ,  boyutlu bir matris olup  olsun. Buna göre,

1.  ise sistem (yani seri) durağandır,
2.  ise sistem durağan değildir ve  durağan olacak şekilde hiçbir  vektörü yoktur,
3.  ise,  olacak şekilde  ve  vektörleri (veya matrisleri) vardır. Ayrıca,  durağan olup  de  vektörüne dik () bir vektör olmak üzere  serisi birim köklüdür.

İki değişkenli durağan olmayan bir zaman serisi, durağan ve durağan olmayan iki tek değişkenli serinin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir. İki değişkenli  zaman serisinin bileşenleri  ve  olsun. Ayrıca,  birim köklü zaman serisini (örnekteki ),  de durağan zaman serisini (örnekteki  göstersin. Yani, serinin kanonik formunun bileşenleri  ve  olsun (). O halde,



olmak üzere, serinin bileşenleri

 , 

şeklinde yazılabilir. Her iki bileşeni de  nin bir fonksiyonu olduğundan bileşenleri  ve  olan  iki değişkenli zaman serisi durağan değildir. Ancak,



olduğundan,  fark serisi durağandır. Kointegrasyon vektörünün belirlenmesi için yukarıdaki  matrisinin belirlenmesi, hatta  matrisinin birinci sütun vektörünün belirlenmesi yeterlidir.  kointegrasyon vektörü (veya  matrisi) bir parametre olduğundan tahmin edilmesi gerekir. Şimdi, yukarıda sözü edilen  matrisine ait özellikleri aşağıdaki örnek üzerinde görelim.

**Örnek 6.2.2** İki değişkenli vektör otoregresif zaman serisi modeli  olmak üzere,



şeklinde verilsin.  karekteristik denkleminin kökleri  ve  olup köklerden biri 1 dir. Yani, seri durağan değildir.  olacak şekilde  ve  matrisleri,

, , 

şeklindedir.  dönüşümü ile elde edilen  kanonik formun bileşenleri de,

, (birim köklü)

, durağan

şeklindedir.  ters dönüşümü ile orjinal serinin bileşenleri,

 

olup, her iki bileşen de  nin fonksiyonu olduğundan durağan değildir. Ayrıca,  olduğundan  olmak üzere,  durağandır. Yani,  serisi kointegrasyonludur.

Şimdi,  şeklindeki VAR(1) modelini göz önüne alalım. Her iki taraftan çıkartılarak,  olmak üzere,



modeli elde edilir. Burada,  matrisi





şeklinde yazılabilir. Önce nin durağan olduğunu, sonra da  lineer dönüşümünün birim köklü olduğunu gösterelim.

**a)**  olup  eşitliğin her iki tarafı  vektörü ile çarpılırsa



eşitliği elde edilir. Yani,  modeline ulaşılır. Buradan,  denirse model  olur. Bu tek değişkenli AR(1) modeli () modeli  için durağandır. Yani  serisi durağandır. Buna göre,  olarak yazıldığında  durağan olacak şekilde  vektörü belirlenmiş olur.

**b)**  lineer dönüşümü durağan değildir.  için  olup,  dir. Buna göre,  dönüşümü açık yazıldığında,





elde edilir. Buradan,  denirse, dönüşüm  haline gelir. Bu tek değişkenli AR(1) modeli durağan değildir. Yani,  veya  zaman serisi modeli durağan değildir

Durağan olmayan herhangi bir vektör otoregresif serisinin bileşenleri durağan ve durağan olmayan (birim köklü) serilerin lineer birleşimi olarak yazılabildiğini biyoruz. Bunun için  olmak üzere  dönüşümü kullanılabilir. Buradaki  matrisi singüler değildir.  birim köklü (durağan olmayan ) seriyi,  de durağan zaman serisini ifade etmek üzere,  serisinin bileşenleri  ve  nin lineer birleşimi olarak yazılır.  matrisi  ve  vektörleri ile oluşturulduğu için tek değildir.

Bir önceki örnekte  matrisi,



olarak seçilirse,



olur.  ters dönüşümü ile orjinal serinin bileşenlerinin durağan ve durağan olmayan serilerin lineer birleşimi şeklinde yazılabileceği açıktır.

Yukarıdaki örneğe geri dönersek,

 ve 

olup,  ve  olduğundan,



bulunur. Yani, bileşenleri  ve  olan iki boyutlu zaman serisi  ve  zaman serileri türünden,



olarak yazılır.  matrisi biliniyorsa geçişler kolaydır. Şimdi,  matrisi



olarak verilmiş olsun. O zaman, iki değişkenli durağan olmayan vektör otoregresif zaman serisinin bileşenleri

 

şeklinde yazılabilir. Bu gösterim çok değişkenli (daha yüksek boyutlu) daha yüksek dereceden otoregresif zaman serileri için de geçerlidir. Buna göre,



olduğundan, durağan olmayan  serisi için  olarak seçildiğinde  durağandır. İki değişkenli serinin bileşenlerinin her ikisi de durağan olmayan  serisinin lineer birleşimi olduğundan  durağan değildir. Durağan olmayan serinin bu şekilde durağan ve durağan olmayan kısımlarının ayrıldığı bu lineer birleşimi sağlayan  matrisidir. Bu  matrisinin bilinmesi durumunda serinin kointegrasyonlu olup olmadığına karar verilebilir. Aksi halde,  matrisi bir parametre olup tahmin edilmesi gerekir. Oysa, örnekte de görüldüğü gibi, bu matrisin bütün elemanlarını (satır ve sütun elemanları) tahmin etmek yerine bir kısmının tahmin edilmesi kointegrasyon vektörünün bulunması için yeterlidir. İki değişkenli bu model için  oranının tahmin edilmesi yeterlidir. Daha önce de belirtildiği gibi yöntem daha yüksek boyutlu seriler için geçerli olduğu gibi daha yüksek dereceden modeller için de geçerlidir. Şimdi bunları birer örnek üzerinde görelim.

**Örnek 6.2.3** Üç değişkenli birinci dereceden vektör otoregresif zaman serisi modeli  olmak üzere,



şeklinde verilsin.  nın özdeğerleri için  matrisini açık olarak,



şeklinde yazalım. Bu matrisin determinantı



olup öz değerler,  denkleminin kökleridir. Denklemin çözümünden öz değerler  ve  olarak bulunmuştur. Köklerden biri 1 olduğundan,  şeklinde verilen VAR(1) modeli durağan değildir. Buradan,  olacak şekilde  ve  matrisleri bulunabilir.  singüler olmayan bir matris olup  dönüşümü ile serinin kanonik formu elde edilir.  ve  matrisleri,

 , 

olarak bulunmuş ve  dönüşümü ile kanonik formun bileşenleri de,

 , birim köklü

 durağan

 durağan

şeklinde elde edilmiştir. Serinin bileşenleri ( dönüşümü ile) de

 



şeklinde kanonik formun lineer birleşimidir. Bu lineer birleşimlerin her biri, durağan olmayan  yi içerdiğinden durağan değildir.  matrisi ile serinin durağan ve durağan olmayan lineer birleşimleri elde edilir. Burada  matrisi,



olarak bulunmuştur. Bu  boyutlu matris singüler olup, rankı  dir.  matrisi  ve  boyutlu iki matrisin çarpımı olarak yazılabilir. Bu matrisler,



şeklindedir. Buna göre,  modeli ele alındığında,  nin durağan,  serisinin de durağan olmadığını görmemiz gerekir.

1. Önce  serisinin durağan olduğunu görelim. Bunun için  modelini ele alalım. Her iki tarafı ile çarpılırsa model  şekline dönüşür. Burada,  matrisi



olduğundan model  şeklinde yazılabilir. Buradan  denirse, yeni model  olur.  matrisinin öz değerleri  ve  olup model durağandır.

1. Şimdi de  serisinin durağan olmadığını gösterelim. Bunun için önce  ya dik matris 



olarak seçildiğinde,



olduğu görülür.  matrisinin lineer bağımsız satırlarının sayısı 1 dir.  modeli ele alınıp eşitliğin her iki tarafı  ile çarpılırsa model  olur. Buradan,  olduğu



matris çarpımından açıktır. Buradan da, model  şeklinde yazılabilir.  denirse model,  olur. Bu model de durağan değildir. Burada,  durağan olmayan zaman serisinin her iki bileşeni de aynıdır ( matrisinin lineer bağımsız satırlarının sayısı 1 dir). Bu nedenle, durağan olmayan bu seriyi  şeklinde tek değişkenli bir zaman serisi olarak almak daha anlamlıdır.

1.  ve  matrisleri,

 , 

olmak üzere,



dönüşümü orijinal serinin durağan ve birim köklü lineer birleşimlerini ayırmaktadır

Buraya kadar, birinci dereceden vektör otoregresif zaman serisi modeli incelendi. Tek değişkenli zaman serilerinde olduğu gibi yüksek dereceden modeller ele alınabilir. Yüksek dereceden modeller de VAR(1) modeli gibi yazılabilir. Örneğin,  olmak üzere, VAR(p) modeli,



şeklinde verilmiş olsun. Bu model, VAR(1) şeklinde ifade edilebilir. Bunun için, değişkenler ve parametre matrisi

, 

ve



olarak seçildiğinde, verilen VAR(p) modeli  şeklinde VAR(1) modeline dönüşür. Böyle bir yazılış ile, serinin VAR(p) veya VAR(1) olarak modellenmesinde karekteristik kökler aynıdır. Ayrıca, parametre matrisinin EKK tahmin edicisinin hesaplanması kısmen kolaydır. Vektör ARMA modelleri, tek değişkenli serilerde olduğu gibi, durağanlık modelin AR kısmının karekteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Bu nedenle, vektör ARMA serileri üzerinde fazla durulmayacaktır. Vektör ARMA zaman serisi modeli de VAR(1) gibi yazılabilir.

**Örnek 6.2.4** İki değişkenli VAR(2) modeli  olmak üzere,



şeklinde verilmiş olsun. İki değişkenli VAR(2) modelinin dört değişkenli VAR(1) modeli olarak yazılabileceğini ve VAR(2) modeline karşılık gelen karekteristik denklem ile VAR(1) modeline karşılık gelen karekteristik denklemin aynı olduğunu görelim. Önce iki değişkenli VAR(2) modeline karşılık gelen karekteristik denklem,  olup, bu determinantı hesaplamak için  matrisi,



olarak yazıldığında matrisin determinantı,



olur. Modeli yukarıdaki gösterime göre VAR(1) olarak yazıp karekteristik denklemini bulalım. Bunun için,

 

olup,

 

ve

 

yazıldığında yeni model,  olur. Bu modelin karekteristik denklemi ise,  dir. Bu modelin karekteristik denklemi için  matrisi





dir. Modelin karekteristik denklemi, bu matrisin determinantıdır. Buradaki  boyutlu matrisin determinantı,

 

olmak üzere,



olarak bulunmuştur.  değerlerinin yerine konursa iki denklemin aynı olduğu görülür. Yani,



 iki değişkenli VAR(2) modelini dört değişkenli VAR(1) modeli şeklinde yazıldığında, karekteristik denklemler aynıdır

Herhangi bir VAR(p) modelinin VAR(1) olarak yazılması, işlemlerin daha kolay yürümesi açısından önemlidir. VAR(p) şeklinde yazılan bir modelin gecikme derecesinin belirlenmesi gerekir. Çok değişkenli VAR modellerinde, gecikme derecelerinin belirlenmesi tek değişkenli zaman serilerinde olduğu gibi kolay değildir. Burada, işlemlerin daha kolay yürümesi açısından sadece VAR(1) modeli üzerinde durulmuştur.

Son olarak, iki değişkenli ARMA(1,1) modelini ele alalım. Bu model  olmak üzere,



olarak verilmiş olsun. Modeli matris ve vektörler türünden

 

olarak yazalım.  matrisinin öz değerleri (

denkleminin kökleri)  ve  olup, her ikiside mutlak değerce 1 den küçüktür. Yani model durağandır.

**6.3. Vektör Otoregresif Serilerde Tahmin**

Tek değişkenli zaman serilerinde olduğu gibi, vektör zaman serilerinde de parametre değerleri verildiğinde serinin durağanlığı kolayca görülür. Çok değişkenli zaman serilerinde en önemli amaç serinin bileşenleri arasında öngörülebilir yani durağan lineer birleşimin araştırılmasıdır. Başka bir deyişle, serinin bileşenleri arasındaki kointegrasyon ilişkisinin belirlenmesidir. Böyle bir ilişki belirlendiği zaman, serinin durağan lineer birleşimleri üzerinden istatistiki sonuç çıkarımlar yapılır.  olarak verilen VAR(1) modeli için  matrisi biliniyorsa, bu ilişkinin belirlenmesi kolaydır.  matrisi bilinmiyorsa da tahmin edilmesi gerekir. Değişik tahmin yöntemleri bulunmakla birlikte, tek değişkenli serilerde olduğu gibi VAR(1) modeli de, çok değişkenli regresyon modeline benzer. Buradan,  nın EKK tahmin edicisi çok değişkenli regresyon teknikleri ile elde edilir. VAR(1) modeli,  olmak üzere,

 

şeklinde verilmiş olsun. Bu gözlemlere göre,  nın EKK tahmin edicisi,



dir. Bu tahmin edici  yerine  yazıldığında,



olarak yazılabilir.

**Örnek 6.3.1** Türkiye’nin 1923-2003 dönemi yıllık ihracat ve ithalat miktarlarını (ABD Doları) göz önüne alalım. İhracat () ve ithalat () miktarlarının yıllara göre değerleri aşağıdadır.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Seri | ACF | PACF |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

  ve  olmak üzere, her iki seriye ait zaman serileri grafikleri yukarıdadır. Grafiklerinden kısmi otokorelasyonlar (her ikisi) birinci gecikmeden sonra sıfıra yakındır. Her iki serinin de otokorelasyonlarındaki azalma yavaştır. Verilerin durağan olmayan AR(1) olarak modellenmesi uygun görünmektedir. Bu sonuçlar AIC ve SBC istatistiklerinin değerleri ile de desteklenmektedir.

Verilere  şeklinde VAR(1) modelinin uygun olduğunu varsayalım. Buna göre,  matrisinin EKK tahmini,





olarak hesaplanmıştır.

Karekteristik denklemin kökleri  determinantının çözümü ile elde edilir. Burada  matrisi,



determinantı da



olarak bulunmuştur.

*Veriler*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Yıl | İhracat | İthalat | Yıl | İhracat | İthalat |
| 1923 |  50590 | 86872 | 1964 | 410771 | 537229 |
| 1924 |  82435 | 100462 | 1965 | 463738 | 571953 |
| 1925 |  102700 | 128953 | 1966 | 490508 | 718269 |
| 1926 |  96437 | 121411 | 1967 | 522334 | 684669 |
| 1927 |  80749 | 107752 | 1968 | 496419 | 763659 |
| 1928 |  88278 | 113710 | 1969 | 536834 | 801236 |
| 1929 |  74827 | 123558 | 1970 | 588476 | 947607 |
| 1930 |  71380 | 69540 | 1971 | 676602 | 1170841 |
| 1931 |  60226 | 59935 | 1972 | 884969 | 1562554 |
| 1932 |  47972 | 40718 | 1973 | 1317083 | 2086214 |
| 1933 |  58065 | 45091 | 1974 | 1532182 | 3777555 |
| 1934 |  73007 | 68761 | 1975 | 1401075 | 4738558 |
| 1935 |  76232 | 70635 | 1976 | 1960214 | 5128647 |
| 1936 |  93670 | 73618 | 1977 | 1753026 | 5796278 |
| 1937 |  109225 | 90540 | 1978 | 2288163 | 4599024 |
| 1938 |  115019 | 118899 | 1979 | 2261157 | 5069431 |
| 1939 |  99647 | 92498 | 1980 | 2910122 | 7909443 |
| 1940 |  80904 | 50035 | 1981 | 4702934 | 8933365 |
| 1941 |  91056 | 55349 | 1982 | 5745973 | 8842664 |
| 1942 |  125115 | 112879 | 1983 | 5727833 | 9235001 |
| 1943 |  196734 | 155340 | 1984 | 7133602 | 10756922 |
| 1944 |  177952 | 126230 | 1985 | 7958008 | 11343375 |
| 1945 |  168264 | 96969 | 1986 | 7456724 | 11104770 |
| 1946 |  214580 | 118889 | 1987 | 10190047 | 14157805 |
| 1947 |  223301 | 244644 | 1988 | 11662021 | 14335396 |
| 1948 |  196799 | 275053 | 1989 | 11624692 | 15792143 |
| 1949 |  247825 | 290220 | 1990 | 12959288 | 22302126 |
| 1950 |  263424 | 285664 | 1991 | 13593462 | 21047014 |
| 1951 |  314082 | 492086 | 1992 | 14714629 | 22871055 |
| 1952 |  362914 | 555920 | 1993 | 15345067 | 29428370 |
| 1953 |  396061 | 532533 | 1994 | 18105872 | 23270019 |
| 1954 |  334924 | 478359 | 1995 | 21637041 | 35709011 |
| 1955 |  313346 | 497637 | 1996 | 23224465 | 43626642 |
| 1956 |  304990 | 407340 | 1997 | 26261072 | 48558721 |
| 1957 |  345217 | 397125 | 1998 | 26973952 | 45921392 |
| 1958 |  247271 | 315098 | 1999 | 26587225 | 40671272 |
| 1959 |  353799 | 469982 | 2000 | 27774906 | 54502821 |
| 1960 |  320731 | 468186 | 2001 | 31334216 | 41399083 |
| 1961 |  346740 | 507205 | 2002 | 36059089 | 51553797 |
| 1962 |  381197 | 619447 | 2003 | 47252036 | 69339692 |
| 1963 |  368087 | 687616 |  |  |  |

Yani, karekteristik denklem  ve kökleri  ve  dir. Köklerden biri 1 olduğundan iki değişkenli VAR(1) modeli durağan değildir. Bu veriler, bölümün ilerleyen kısımlarında tekrar ele alınacaktır

Çok değişkenli zaman serilerinde parametre matrisinin tahmin edilmesi ile ilgili değişik yöntemler vardır. Bilindiği gibi, serinin kendisi durağan olmamasına rağmen, seriyi durağanlaştıran bir lineer birleşim bulunabilir. Genellikle, parametre matrisinin tahmini yerine, durağanlığı sağlayan lineer birleşimi veren parametre vektörünün tahmin edilmesi üzerinde durulur.

Bileşenleri  ve  olan durağan olmayan VAR(1) zaman serisi modeli  şeklinde verilsin. Bu bölümün birinci kısmında da bahsedildiği gibi, durağan olmayan zaman serisi modelinin her iki bileşeni de durağan değildir. Serinin bileşenleri  durağan olmayan seriyi (birim köklü),  de durağan seriyi göstermek üzere,

 

şeklinde yazılabilir ( katsayıları parametre matrisinin özdeğerlerine bağlı olarak hesaplanır). Serinin her iki bileşeni de  yi içerdiğinden durağan değildir. Ancak,



olup,  durağan olduğundan  de durağandır. Buna göre, durağan olmayan  modelindeki  matrisinin tahmin edilmesi yerine ( nın eleman sayısı 4) bu seriyi durağanlaştırmak için  oranının tahmin edilmesi yeterlidir.  olmak üzere  nın durağan olduğu,



eşitliğinden açıktır. Bu fark serisi  nin  üzerine regresyonundan elde edilen artıklara benzemektedir. Durağan lineer birleşimi bulabilmek için  matrisinin bütün elemanlarını tahmin etmek yerine  oranının tahmin edilmesi yeterlidir. Engle ve Granger (1987) bu oranı tahmin etmek için

 

veya

 

regresyon modelini göz önüne alarak  nın EKK tahmin edicisinin  oranı için tutarlı olduğunu göstermişlerdir (Harris ve Sollis, 2003, s.79; Enders, 2002, s.336). Yani,  nın EKK tahmin edicisi  olmak üzere  iken,  dir.  yı tahmin etmek için başka yöntemler de vardır. Bunlardan biri de Johansen (1988) tarafından önerilen koşullu en çok olabilirlik yöntemidir.

**6.4. Kointegrasyon (Eşbütünleşme)**

Durağan olmayan vektör zaman serilerinde, serinin bileşenleri arasında durağan bir lineer birleşim bulunabiliyorsa, böyle seriler kointegrasyonlu (eşbütünleşik) serilerdir.  tane birim köke sahip  serisi  şeklinde gösterilir. Aynı dereceden bütünleşik  ve  serilerini göz önüne alalım. Genel olarak durağan olmayan bu serilerin herhangi bir lineer birleşiminin de  olması beklenir. Ancak,  nin  üzerine regresyonundan elde edilen artıklar serisi daha düşük dereceden bütünleşik oluyorsa , Engle ve Granger (1987) bu serileri  dereceli kointegre (eşbütünleşik) seriler olarak tanımlamıştır. Yani,  dir. Başka bir ifade ile,  ve  ve  nin  üzerine regresyonundan elde edilen artıklar  ise,  dir. Artıklar serisinin durağanlığını sınamak için parametrelerin EKK tahmin edicisinin dağılımına dayanan Dickey-Fuller test yönteminin uygulanması doğru değildir.

Kointegrasyon vektörünün tahmini ve verilen çok değişkenli bir zaman serisinin kointegrasyonlu olup olmadığının sınanmasına ilişkin bir çok yöntem vardır. Bunlardan, Engle ve Granger (1987) tarafından önerilen en küçük kareler yöntemi ile Johansen (1988) tarafından önerilen koşullu en çok olabilirlik yöntemi öne çıkmaktadır. Aşağıda bu yöntemler, örnekler ile beraber kısaca açıklanmaya çalışılmıştır.