**3.5. Hareketli Ortalama (MA) Serilerinde Tahmin**

Hareketli ortalama serilerinde parametre tahmini, AR serilerine göre daha karmaşıktır. AR modelleri regresyon modeline benzediği için tahmin yapmak kısmen kolaydır.  şeklinde verilen MA(1) zaman serisinin otokorelasyon fonksiyonu,



şeklindedir. Otokorelasyonların nasıl tahmin edileceği bir önceki kısımda incelendi. Oradan elde edilen tahmin değerleri fonksiyonda yerine konularak,  nın tahmin değeri bulunabilir. Ancak, bu fonksiyonun bir otokorelasyon fonksiyonu olabilmesi için  olması gerekir. O zaman bulunan tahmin değerleri için bu koşul dikkate alınmalıdır. Otokorelasyon fonksiyonunun tahmin edicisi,



olup bu tahmin edici,



şeklinde yazılabilir.  eşitliği,  şeklinde ikinci dereceden denklemin çözümünden  nın tahmin edicisi,  şeklinde bulunabilir.  koşulu dikkate alındığında tahmin edici (Fuller, 1996, s.422),



şeklinde olur.

**Örnek 3.5.1**  olmak üzere, MA(2) zaman serisi modeli  şeklinde verilsin.  parametresinin tahmini için örneklem ortalaması kullanılabilir. Durağan zaman serilerinde örneklem ortalamasının kitle ortalaması için tutarlı olduğu gösterilmişti. Basit aritmetik işlemlerden sonra örneklem ortalaması,



şeklinde yazılabilir. Burada,

 ve 

dir.  ve sabit bir  sayısı için  dir. Buradan,  elde edilir.  olduğundan  olup  için



olasılıkta yakınsama elde edilir. Yani,  iken  olup, örneklem ortalaması kitle ortalamasına olasılıkta yakınsar. Ayrıca,



yazılabilir. Buradan,

 ve  iken 

olduğundan Slutsky teoremine göre  iken,



dağılımda yakınsama elde edilir. Bu asimptotik özelliğin geçerli olabilmesi için  olmalıdır

Örnekteki sonuç yüksek dereceden MA modelleri için de geçerlidir. MA(q) zaman serisi modeli  ve  olmak üzere,



şeklinde ise,  iken  dir.  için  iken,



dağılımda yakınsama yazılabilir.  ve  olmak üzere MA(q) zaman serisi modeli,



şeklinde verilmiş olsun. Bu modele karşılık gelen karekteristik denklem



olup, modelin tersinir (denklemin bütün kökleri mutlak değerce 1 den küçük) olduğunu kabul edelim. Bu durumda model,



şeklinde yazılabilir. Buradaki katsayılar,  ve diğerleri ,



şeklindedir. Bunlardan belirli sayıdaki (ilk  tanesi) kullanılarak seri için



yaklaşımı ele alınabilir. Bu yaklaşıma göre MA(q) ile modellenmiş  serisi AR(k) gibi düşünerek,  katsayılarının tahmin değerleri hesaplanır. Elde edilen  ler  eşitliklerinden  tahminleri bulunur. Bu denklem sisteminin çözümü pratik değildir. Bu katsayılar için  lerin  üzerine regresyonu kullanılarak tahmin değerleri hesaplanır. Burada,



regresyon denklemi yardımı ile  tahmin değerleri hesaplanır.

Görüldüğü gibi, MA serilerinde tahmin edicilerin elde edilmesi karmaşıktır. Tahmin edicilerin bulunma yöntemleri ve asimptotik özellikleri (Fuller, 1996, s.421-442) de incelenmiştir. İstatistik paket programlar (SAS gibi) kullanılarak bu tahmin değerleri doğrudan hesaplanır. Örneğin, SAS da ARMA(2,3) modelinin parametreleri,

data a; input x; cards;



;

proc arima; i var=x; e p=2 q=3; run;

programı çalıştırılarak hesaplanabilir. Programda yer alan komutları ayrı ayrı açıklayalım. SAS da bir programı çalıştırmak için önce analizlerin yapılacağı verilere bir isim verilir. Programdaki, ”data a” komutu ile kullanacağımız veriler “a” olarak adlandırılmıştır. Daha sonra değişken ismi girilir. Burada “input x” komutu ile değişken ismi “x” olarak seçilmiştir. Sonra “cards” yazılarak programda verildiği gibi veriler girilir. Veriler girildikten sonra analiz kısmına geçilir, “proc arima” komutu zaman serilerinde standart analizlerin yapılabilmesi için kullanılan komuttur. “i var = x” komutunda analizlerin yapılacağı değişken belirlenir. Buradaki “i“ komutu “identify” anlamındadır. Bu komutun yazılması ile, SAS’da otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının değerleri hesaplanarak grafikleri çizilir. Bu grafiklere bakarak sezgisel olarak modelin AR, MA veya ARMA türlerinden biri olacağına ve model derecelerinin neler olabileceğine karar verilir. Daha sonra “e p=2 q=3” komutu yazılarak verilerin ARMA(2,3) olarak modellenecegi belirtilir. Buradaki “e” komutu “estimate” anlamındadır ve çıktı olarak parametrelerin tahmin değerleri hesaplanır. Bu komut ile, bir sonraki bölümde göreceğimiz model belirleme kriterlerinden AIC ve SBC istatistiklerinin değerleri de hesaplanır.

**Örnek 3.5.2** Rasgele üretilen 50 veri satırlar halinde aşağıdadır. Bu verilerin SAS da analizlerini yapıp çıktılarını inceleyelim.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 17.4 | 16.3 | 15.0 | 13.8 | 13.5 | 14.4 | 14.4 | 13.7 | 11.6 | 10.6 |
| 11.8 | 12.7 | 11.9 | 10.8 | 11.4 | 13.6 | 18.1 | 20.7 | 22.4 | 25.1 |
| 27.7 | 29.5 | 30.0 | 27.9 | 26.7 | 23.8 | 21.0 | 18.8 | 18.7 | 17.2 |
| 14.9 | 13.1 | 11.7 | 10.1 | 9.9 | 9.9 | 9.0 | 9.1 | 8.3 | 7.3 |
| 5.9 | 5.6 | 7.6 | 8.7 | 11.1 | 10.9 | 11.5 | 12.5 | 13.5 | 15.3 |

Bu veriler için aşağıdaki programı çalıştıralım. Program çalıştırılırken, açıklama yapılmak isteniyorsa bu açıklamalar /\*…\*/; komutları arasına yazılır. Bu açıklamalar komut olarak dikkate alınmaz. Ayrıca, “input x @@” komutunda kullanılan “@@” ile veriler satır halinde girilebilir.

data ornek; /\* veriler ornek olarak tanımlandı\*/;

input x@@; cards; /\* cards komutu kullanıldıktan sonra veriler girilmelidir. Değişkenler üzerinde dönüşüm yapılmak isteniyorsa, “cards” komutu kullanılmadan önce yapılmalıdır. \*/;

17.4 16.3 15.0 13.8 13.5 14.4 14.4 13.7 11.6 10.6 11.8 12.7 11.9 10.8 11.4 13.6 18.1 20.7 22.4 25.1 27.7 29.5 30.0 27.9 26.7 23.8 21.0 18.8 18.7 17.2 14.9 13.1 11.7 10.1 9.9 9.9 9.0 9.1 8.3 7.3 5.9 5.6 7.6 8.7 11.1 10.9 11.5 12.5 13.5 15.3

;

proc arima; i var=x;

e p=2 q=1; /\* verilerin ARMA(2,1) olarak modellenmesi istenmektedir \*/; run;

Bu program çalıştırıldığında çıktılar aşağıdaki gibi olacaktır.

*Tablo A)* Verilerin aritmetik ortalaması ve örneklem varyansı bu tabloda verilmiştir. Buradaki örneklem ortalaması ile (14.928) Tablo (I) de verilen “Estimated Mean” karıştırılmamalıdır.

*Tablo B, C ve D* sırası ile otokorelasyon, ters (inverse) otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının tahmin değerleri ile bunların grafiklerini içermektedir. Bu grafiklere bakılarak model türü ve dereceleri hakkında bir fikir sahibi olunur. Bu grafiklerde, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlar için %95 lik güven bantları da verilmektedir.

Modelde hata terimlerinin beyaz gürültü serisine uygun olup olmadığını sınamak için önerilen ki-kare test istatistiklerinin değerleri *Tablo E* de verilmiştir.

*Tablo F*  de koşullu en küçük kareler yöntemi ile elde edilen tahminler, bunların standart hataları ve  istatistiklerinin değerleri ile model seçim kriterlerinden AIC ve SBC istatistiklerinin değerleri bulunmaktadır.

*Tablo G ve H*  sırası ile tahmin edilen parametrelere ilişkin korelasyon matrisi ile modelden elde edilen artıklar serisinin beyaz gürültü serisi olup olmadığını sınamak için ki-kare istatistiğinin değerlerini içermektedir.

Veriler ARMA(2,1) olarak modellendiğinde, parametre tahminleri *Tablo (I)* da verilmiştir.

|  |
| --- |
| A) Name of variable = X.  Mean of working series = 14.928  Standard deviation = 6.214565  Number of observations = 50  B) Autocorrelations  Lag Covariance Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 Std  0 38.620816 1.00000 | |\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* | 0  1 37.245424 0.96439 | . |\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* | 0.141421  2 34.091409 0.88272 | . |\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* | 0.239169  3 29.854105 0.77301 | . |\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* | 0.297270  4 25.009569 0.64757 | . |\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* | 0.335069  5 19.582930 0.50706 | . |\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* . | 0.359228  6 13.490306 0.34930 | . |\*\*\*\*\*\*\* . | 0.373268  7 7.216938 0.18687 | . |\*\*\*\* . | 0.379749  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  C) Inverse Autocorrelations  Lag Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1  1 -0.60986 | \*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*| . |  2 0.04692 | . |\* . |  3 0.07352 | . |\* . |  4 0.07227 | . |\* . |  5 -0.17106 | . \*\*\*| . |  6 0.13725 | . |\*\*\* . |  7 -0.12713 | . \*\*\*| . |  D) Partial Autocorrelations  Lag Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1  1 0.96439 | . |\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* |  2 -0.67644 | \*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*| . |  3 -0.04671 | . \*| . |  4 -0.05975 | . \*| . |  5 -0.26772 | .\*\*\*\*\*| . |  6 -0.26247 | .\*\*\*\*\*| . |  7 0.13015 | . |\*\*\* . |  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  E) Autocorrelation Check for White Noise  To Chi Autocorrelations  Lag Square DF Prob  6 170.38 6 0.000 0.964 0.883 0.773 0.648 0.507 0.349  12 191.84 12 0.000 0.187 0.033 -0.098 -0.208 -0.302 -0.378  F) Conditional Least Squares Estimation  Approx.  Parameter Estimate Std Error T Ratio Lag  MU 17.75313 0.88326 20.10 0  MA1,1 -0.04565 0.19878 -0.23 1  AR1,1 1.68099 0.13853 12.13 1  AR1,2 -0.73220 0.13729 -5.33 2  Constant Estimate = 0.90908173  Variance Estimate = 1.27057785  Std Error Estimate = 1.12719912  AIC = 157.698363\*  SBC = 165.346455\*  G) Correlations of the Estimates  Parameter MU MA1,1 AR1,1 AR1,2  MU 1.000 -0.004 0.004 0.015  MA1,1 -0.004 1.000 0.666 -0.655  AR1,1 0.004 0.666 1.000 -0.984  AR1,2 0.015 -0.655 -0.984 1.000  H) Autocorrelation Check of Residuals  To Chi Autocorrelations  Lag Square DF Prob  6 6.24 3 0.101 -0.002 -0.045 -0.169 0.016 0.256 0.113  12 8.55 9 0.480 -0.032 -0.171 -0.028 0.050 -0.056 -0.018  18 10.20 15 0.807 -0.074 -0.028 -0.014 -0.034 -0.087 0.080  24 14.85 21 0.830 -0.162 -0.091 -0.060 0.074 0.063 -0.071  I) Model for variable X  Estimated Mean = 17.7531315  Autoregressive Factors  Factor 1: 1 - 1.681 B\*\*(1) + 0.7322 B\*\*(2)  Moving Average Factors  Factor 1: 1 + 0.045647 B\*\*(1) |

Burada model,



olarak ele alındığından, parametre tahmin değerleri

, ,  ve 

olarak hesaplanmıştır

**3.6. Mevsimsel Zaman Serilerinde Tahmin**

Ekonomik bir çok zaman serisi mevsimsellik özelliği gösterir. Örneğin, yaz aylarında dondurma tüketiminin diğer mevsimlere göre fazla olacağını düşünmek doğaldır. Veriler bazen üçer aylık periyodlar halinde toplanır. Örneğin, bir ülkedeki elektrik tüketimi verileri aylık veya mevsimsel olarak toplanabilir. Bazen de, mevsimsel olarak toplanmasa da gizli bir periyodiklik gözlenebilir. İktisadi olarak bu periyodikliğin belirlenmesi önemlidir.

İkinci bölümde, otoregresif mevsimsel zaman serilerine değinilmiş, mevsimsel serilerin genel özellikleri incelenmişti.  olmak üzere, aylık (periyodu 12 olan) bir zaman serisi,



olarak verilmiş olsun.  denirse,  serisi için otokovaryanslar,

,, 

, 

ve diğer durumlarda dır (Wei, 2006 s. 168). Otokorelasyonlar ise,

, , 

şeklindedir. Diğer otokorelasyonlar sıfırdır. Mevsimsel zaman serilerinde en önemli problemlerden biri uygun fark derecesinin belirlenmesidir. Fark derecelerinin belirlenmesi ise serinin içerdiği birim kök sayısı ile ilgilidir (beşinci bölümde incelenecektir). Bu kısımda verilen durağan mevsimsel bir zaman serisinin model parametrelerinin tahmini üzerinde durulacaktır.  olmak üzere  modeli,



şeklinde verilmiş olsun. Bu model,  ve  olmak üzere



şeklinde yazılabilir. Yani, söz konusu mevsimsel zaman serisi modeli de regresyon modeline benzer. Parametre tahminleri, AR serilerinde olduğu gibi yapılır.

**Örnek 3.6.1** Aşağıda 60 gözlemden oluşan bir zaman serisi satırlar halinde verilmiştir. Bu zaman serisine ait grafikler de aşağıdadır. Grafikler incelendiğinde, kısmi otokorelasyonlar dördüncü gecikmeden sonra sıfıra yakın değerler almaktadır. Otokorelasyonlar ise, her dört gecikmeden sonra üstel olarak azalmaktadır.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Zaman Serisi** | **ACF** | **PACF** |
|  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8.9 | 9.6 | 9.1 | 9.3 | 9.2 | 8.6 | 8.0 | 8.9 | 7.9 | 9.9 |
| 7.8 | 9.7 | 8.3 | 9.9 | 8.8 | 12.2 | 8.9 | 9.2 | 10.7 | 11.4 |
| 10.3 | 9.6 | 9.1 | 10.6 | 10.5 | 10.4 | 9.7 | 10.1 | 10.8 | 10.1 |
| 9.9 | 10.5 | 12.6 | 10.2 | 8.4 | 10.8 | 12.5 | 9.9 | 9.0 | 10.4 |
| 11.7 | 8.0 | 8.9 | 11.5 | 11.5 | 9.1 | 6.9 | 10.3 | 10.6 | 10.0 |
| 7.2 | 10.0 | 10.3 | 9.6 | 8.0 | 10.9 | 10.1 | 8.5 | 8.8 | 9.7 |

Buna göre serinin



olarak modellenmesi uygun görünmektedir. Zaman serilerinde durağanlık testleri henüz incelenmediği için, şimdilik serinin durağan olduğunu kabul edelim. Otokorelasyonlarındaki hızlı azalma, sezgisel de olsa serinin durağanlığına işaret etmektedir. Model  ve  olmak üzere,



şeklinde yazıldığında parametre tahminleri için modeli,

 ,  ve 

olmak üzere,  şeklinde yazalım. Buna göre,  nın en küçük kareler tahmin edicisi,  dir. Verilerden,

,



vektör ve matrisleri hesaplanmıştır. Buna göre EKK tahminleri de,  olarak bulunmuştur. Yani, kestirim denklemi,  şeklindedir. SAS PROC ARIMA ile hesaplanan tahminler (proc arima; i var=x; e p=(4);) EKK tahminlerine çok yakındır ( ve  olarak hesaplanmıştır). Verilere,



şeklinde bir modelin uygun olduğunu düşünelim.  hipotezini bunlardan en az biri sıfırdan farklıdır alternatif hipotezine karşı test etmek isteyelim. Seri durağan olduğundan bu hipotezin testi için  test istatistiğinin değeri kullanılabilir. Bu model için SAS çıktıları aşağıda verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi  ve  parametrelerine karşılık gelen değerleri oldukça yüksektir. Yani, parametrelerin ayrı ayrı sıfır olduğu yokluk hipotezleri red edilemez. Bilinen parametre tahminlerine ilişkin test istatistiklerinin değerlerine bakarak verilerin



şeklinde bir modele uygun olduğu söylenebilir. Seri durağan ise, regresyon ile elde edilen tahmin değerleri ile PROC ARIMA da elde edilen tahmin değerleri birbirlerine yakındır. istatistiğinin değeri de



olarak hesaplanmıştır.

|  |
| --- |
| **Model:** |
| Sum of Mean  Source DF Squares Square F Value Prob>F  Model 4 44.52773 11.13193 13.133 0.0001  Error 51 43.22942 0.84764  C Total 55 87.75714  \*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*  Parameter Standard T for H0:  UVariable DF Estimate Error Parameter=0 Prob > |TU|  INTERCEP 1 3.140709 1.99901309 1.571 **0.1223**  X1 1 0.055543 0.10235326 0.543 **0.5897**  X2 1 -0.086977 0.10249045 -0.849 **0.4001**  X3 1 0.024026 0.10364239 0.232 **0.8176**  X4 1 0.685752 0.10286527 6.667 0.0001 |
| **Model:** |
| Sum of Mean  Source DF Squares Square F Value Prob>F  Model 1 43.76042 43.76042 53.710 0.0001  Error 54 43.99672 0.81475  C Total 55 87.75714  Parameter Standard T for H0:  UVariable DF Estimate Error Parameter=0 Prob > |T U|  INTERCEP 1 2.821324 0.95404601 2.957 0.0046  X4 1 0.711106 0.09703013 7.329 0.0001 |

 anlam düzeyinde  olduğundan  yokluk hipotezi red edilemez. Yani, bu verilerin



şeklinde modellenmesi uygundur. Regresyon denklemi göz önüne alındığında parametre tahmin değerleri  ve  olup kestirim denklemi,  dir

**3.7. Problemler**

**3.7.1** beklenen değer vektörü  ve varyans kovaryans matrisi



olan bağımsız rasgele değişkenlerin dizisi olsun.  istatistiğinin asimptotik dağılımını bulunuz.

**3.7.2**  ve  olmak üzere  şeklinde verilen MA(1) zaman serisi modelini göz önüne alalım. Aşağıda verilen reel sayı dizilerinin yakınsama hızlarını elde ediniz.

**a)**  **b)**  **c)** 

**3.7.3**  ve  olmak üzere  şeklinde verilen MA(1) zaman serisi modelini göz önüne alalım. Aşağıdaki rasgele değişken dizilerinin yakınsama hızlarını bulunuz.

**a)**  **b)** **c)**  **d)**  **e)**

**3.7.4** AR(2) modeli  şeklinde verilmiş olsun. Aşağıdaki ifadelerin yakınsama hızlarını elde ediniz.

**a)**  **b)**  **c)**  **d)** 

**e)**  **f)**  **g)**  **h)** 

**3.7.5**  ve  olmak üzere, AR(1) zaman serisi modeli  şeklinde verilsin.  ve  durumları için aşağıdaki rasgele değişken dizilerinin yakınsama hızlarını bulunuz.

***i)***  ***ii)***  ***iii)***  ***iv)*** 

**3.7.6** Teorem (3.2.2) de ispatı yapılmayan (b), (c) ve (e) ifadelerini ispat ediniz.

**3.7.7**  şeklinde verilen MA(1) modeli için  tahmin edicisinin asimptotik dağılımını elde ediniz.

**3.7.8**  olmak üzere  olarak verilen  zaman serisinin örneklem otokorelasyonları  olsun. Sabit her  için  iken  olduğunu gösteriniz (Brockwell ve Davis, 1987).

**3.7.9** AR(1) zaman serisi  şeklinde verilsin.  nun EKK tahmin edicisini yazınız. Bu tahmin edici  olsun.  için  iken  olduğunu gösteriniz.

**3.7.10** Durağan AR(1) zaman serisi modeli,



şeklinde verilsin.  olmak üzere Fourier katsayıları

 ve 

olarak verilmiştir.  nin asimptotik dağılımını bulunuz.