**5.5. Asimptotik Özellikler**

Bu kısımda, birim köklü zaman serilerinde parametrelerin EKK tahmin edicilerinin bazı asimptotik özellikleri incelenecektir. Bu özelliklerin çoğu Hamilton (1994) den özetlenerek aktarılmıştır.

Birinci dereceden otoregresif zaman serisi modeli,



şeklinde verilmiş olsun. Buradan,  nun EKK tahmin edicisi,

 şeklinde olup,  ve  iken  ve  için,



olduğunu biliyoruz.  için asimptotik dağılım normal değildir. Bilindiği gibi,  için



dir. Bu terimin payındaki istatistiğin asimptotik dağılımını bulmak kolaydır.  olmak üzere,  olacağından,



yazılır. Ayrıca,  olduğundan zayıf büyük sayılar yasasına göre  iken,



ve merkezi limit teoremine göre de  iken,



olduğunu biliyoruz. Buradan da  iken



asimptotik dağılımı elde edilir. Bu iki sonuç Slutsky teoremi ile beraber,  nun EKK tahmin edicisinin payının asimptotik dağılımı  iken,



olarak bulunur.  nin paydasındaki istatistiğin asimptotik dağılımı bu kadar kolay değildir.  olduğundan,



dir. O halde, paydadaki istatistiğin beklenen değeri



olduğundan,  dir. Asimptotik dağılımı elde etmek için Brownian Hareketini (Brownian Motion) hatırlayalım.

 **Brownian Hareketi:**  normal dağılımlı beyaz gürültü serisi olsun. Rasgele yürüyüş süreci (random walk),  olmak üzere  şeklindedir. Buna göre,  olup  için



dir. Ayrıca,  için  ile  bağımsızdır.

**Tanım 5.5.1** Standart Brownian Hareketi , aşağıdaki üç özelliği her bir  için sağlayan sürekli zamanlı stokastik süreçtir. Bunlar;

a) 

b)  için  rasgele değişkenleri bağımsız normal dağılıma sahiptir.

c)  hemen hemen her yerde  nin sürekli bir fonksiyonudur

**Örnek 5.5.1** Aşağıda bazı asimptotik özellikler verilmiştir (Levin ve Lin (1992)). Bu örnekte aksi söylenmedikçe,  standart Brownian hareketidir. Aşağıdaki özelliklerden bazılarının çözümüne girilmemiştir.

1)  dır.

2)  dır.

3) 

4) dır.

5)  dir.

İspat:  için iddia



eşitliğinden açıktır.

6) 

7) . Not: (6) ve (7) den  bulunur.

8)  dir.

İspat: Yine,  için  nin



şeklinde yazılması ile,



bulunur.

9)  dir.

İspat: Yine,  için kovaryansın tanımından



bulunur

Brownian hareketi, merkezi limit teoreminin genel bir kullanılmına olanak sağlar. Merkezi limit teoremi basit hali ile söyledir:  beklenen değeri  varyansı  olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler ve  de örneklem ortalaması olmak üzere,  iken



dir.

Beklenen değeri sıfır varyansı  olan aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin dizisi  olsun. Örneklemin ilk yarısını ( kadarını) kullanmak isteyelim. Burada,  çift ise ,  tek olduğunda ise  dir. Bu örnekleme merkezi limit teoremi uygulandığında,



olmak üzere  iken,



yazılır. Aynı şekilde örneklemin ikinci yarısına merkezi limit teoremi uygulandığında aynı asimptotik özellik elde edilir. Bu iki dağılım birbirinden bağımsızdır. Bunun daha genel hali,  olmak üzere ,



şeklinde verilebilir. Burada, ,  ye göre bir basamak fonksiyonudur. Daha açık bir ifade ile ,



olarak yazılabilir. Buradan,



dir. Diğer taraftan,

 ve 

olduğundan,  iken  veya



elde edilir. Benzer şekilde,  ve  ve  tam değer kısımlarını göstermek üzere  iken,



dir. O halde,  standart normal rasgele değişkeni göstermek üzere,



dir. Bu gösterim, fonksiyonel merkezi limit teoremi (functional central limit theorem) olarak bilinir. Burada,  rasgele bir fonksiyonu göstermekte olup,  bu rasgele fonksiyonun  zamanındaki değeridir. Dolayısı ile,  bir fonksiyon olup  de bir rasgele değişkendir.  de bilinen örneklem ortalamasıdır. Yani,



dir. Fonksiyonel merkezi limit teoreminden, bilinen merkezi limit teoremine geçiş  ile yapılır. Yani,



dir. Bu sonuçlar ve sürekli dönüşüm teoremi (continuous mapping theorem) yardımı ile rasgele değişken dizilerinin bir çok özelliği elde edilir. Önce süreki dönüşüm teoremini hatırlayalım:

**Sürekli Dönüşüm Theoremi** (Continuous Mapping Theorem, Hamilton (1994) s.482)  rasgele değişkenlerin bir dizisi,  sürekli bir fonksiyon ve  de bir rasgele değişken olsun. Bu durumda  iken,

 ise 

dir

Buna göre  iken,  ve  olup,

 ise 

dir. Buradan da



elde edilmiş olur. Şimdi, sürekli dönüşüm teoremi kullanılarak durağan olmayan zaman serilerinde bu sonuçların uygulamalarını görelim.

**Birim Köklü Zaman Serileri İçin Asimptotik Özellikler:** Birim köklü zaman serilerinde parametrelerin EKK tahmin edicilerinin asimptotik dağılımlarının normal olmadığını biliyoruz. Önce, AR(1) modeli  olmak üzere,  olarak verilmiş olsun.  için,  olup,  rasgele değişkenini,



şeklinde yazalım. Burada ,  nin bir fonksiyonudur. Buradaki  tane dikdörtgenin alanları toplamı tüm eğri altındaki alanı verir. Örneğin, inci dikdörtgenin alanı,  uzunluğu ile  yüksekliğinin çarpımıdır. O zaman,  fonksiyonunun integrali,

 

şeklinde yazılabilir. Bu aşağıdaki grafikte gösterilmeye çalışılmıştır.



Burada,

 ifadesinin her iki tarafı  ile çarpılırsa,



eşitliği elde edilir. Buradan, sürekli dönüşüm teoremine göre  iken



 veya



asimptotik sonucu elde edilmiş olur. Daha açık olarak,





yazılabilir. O halde,



olmak üzere  iken,



olup,  terimi beklenen değeri sıfır varyansı,



olan bir rasgele değişken olup asimptotik dağılımı normaldir. Buna göre,  iken



elde edilir. Burada  dağılımı  ile ifade edilmiştir. Drift (yığılma) olmayan  şeklindeki bir model için  iken  ıraksak,  yakınsaktır. Ayrıca,  iken

dir.  denirse , sonlu sayıdaki dikdörtgenin alanları toplamı olup,



dir. Sürekli dönüşüm teoremine göre  iken,

 

asimptotik yaklaşımı yazılır. Bu integral,  nin

 

şeklindeki ifadesinden açıktır. Bilindiği gibi  iken



dir. Bu iki sonuç birleştirilirse  modeline göre  hipotezini test etmek için kullanılan  istatistiğinin asimptotik dağılımı (Dickey-Fuller dağılımı)  iken,



şeklinde ifade edilir. Diğer taraftan  iken,



ve



dir. Bununla birlikte,



olup  iken,

 ve 

olduğundan, Slutsky teoremine göre  iken,



asimptotik dağılım elde edilir. Burada,  dir. Özet olarak,  bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere, AR(1) modeli,  olarak verildiğinde, aşağıdaki sonuçlar yazılabilir (Hamilton, 1994). Bunlar  iken,

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

dır.

Şimdi bu sonuçları, birim kök testleri için neredeyse standart hale gelen Dickey-Fuller test istatistiklerine uygulayalım. Üç farklı durum ayrı ayrı incelenecektir. Aşağıdaki her durumda beyaz gürültü serisi, birbirinden bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler olarak alınacaktır.

**Durum I:** AR(1) modeli  olarak verildiğinde,  hipotezi altında  nun EKK tahmin edicisi

  ve 

şeklinde olup  iken,

  ve 

olduğundan,



olduğunu biliyoruz. AR(1) modeli regresyon modeline benzediğinden,  hipotezini test etmek için türü istatistik daha yaygın şekilde kullanılmaktadır. Bu istatistiğin asimptotik dağılımı da bilinen dağılımı değildir. Dağılım farklı olduğundan, istatistik  yerine  kullanılmıştır.  istatistiği de basit aritmetik işlemlerden sonra



 

olarak yazılabilir. Burada,

 ve 

dir. Ayrıca  iken,



olup  nin asimptotik dağılımı  iken,



dir.

**Durum II:** AR(1) modeli  olarak verilmiş olsun. Model  için  şeklinde de yazılabilir.  hipotezi altında  şekline dönüşür.  modeline göre  nun EKK tahmin edicisi Durum I den farklıdır. Parametrelerin EKK tahmin edicileri,



denklem sisteminin çözümüleridir.  hipotezi altında,  yerine  yazıldığında denklem sistemi,



şekline dönüşür. Buradaki ifadelerin yakınsama hızları,

, ,

, 

şeklinde olup  yeterince büyük ise bu ifadeleri,



şeklinde yazalım. Son eşitliğin her iki tarafı  matrisi ile çarpıldığında,



veya



eşitliği elde edilir. Burada

 ve 

dir. Buradan  iken,



veya,



elde edilir. Buna göre  iken,



asimptotik dağılımı elde edilir. Bu sonuçlardan parametrelerin EKK tahmin edicilerinin asimptotik dağılımı  iken,





olarak bulunur. Diğer taraftan,



denirse yukarıdaki matrisin tersi,



olur.  hipotezini test etmek için  test istatistiğinin kullanılabileceğini biliyoruz. Bunun asimptotik dağılımı ise  iken,





şeklindedir. Denklem sisteminin çözümünden hem  hem de  EKK tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları normal değildir. Ayrıca, ortak dağılım da asimptotik normal değildir.

Model  şeklinde ise  nun EKK tahmin edicisi  ile gösterilir (örneklem hacmine bağlı olarak bazen  kullanılır).

Benzer şekilde,  hipotezini test etmek için, türü istatistiğin asimptotik dağılımını elde etmeye çalışalım. Önce,



olmak üzere,



den türü istatistik de



şeklinde yazılabilir. Buradan,





olup,





eşitliği yukarıdaki sonuçlar ile kullanıldığında  iken  olduğu görülür. Buradan da,



elde edilir. Ayrıca,



olduğundan  istatistiğinin asimptotik dağılımı da



şeklinde elde edilmiş olur.

**Durum III (Random Walk with Drift)** Burada  hipotezi altında model,  şeklinde yazılır. Daha açık olarak  için zaman serisi modeli,



olarak yazılabilir. Buna göre,



olup  iken,

 

ve

 

yakınsamaları elde edilir. Buradan  örneklem hacmi yeterince büyük ise



dir. Modeldeki  terimi bütün asimptotik sonuçları etkilemektedir. Önce,  iken



olduğu açıktır. Örneklem hacmi  yeterince büyük ise,



olup  iken  dür. Diğer taraftan,



olduğundan  yeterince büyük olduğunda,



yazılabilir. Başka bir ifade ile,

 ve 

özellikleri dikkate alınarak elde edilen sonuçlar toparlandığında,



eşitliği yazılır. Ayrıca,  iken



olduğu da dikkate alınırsa,



olup asimptotik dağılım,  iken,



olarak elde edilir. Model drift içeriyorsa (random walk with drift), yani model  şeklinde verilmiş ise,  hipotezi altında parametrelerin EKK tahmin edicisi asimptotik normaldir. Böyle bir model için  hipotezini test etmek için normal dağılım tabloları kullanılabilir.

 şeklinde verilen AR(1) modeli  şeklinde yazılabilir. Ancak, bu model yukarıdaki model ile karıştırılmamalıdır.  şeklinde verilen model, beklenen değeri  olan AR(1) modelidir.

**5.6 Problemler**

**5.6.1** AR(1) zaman serisi modeli  şeklinde verilmiş olsun.  nun EKK tahmin edicisinin asimptotik dağılımını  hipotezi altında elde ediniz.

**5.6.2** AR(1) zaman serisi modeli  şeklinde verilsin.  beklenen değeri  varyansı  olan bütün  lerden bağımsız bir rasgele değişken olsun.

a) ,  değerleri ile  otokovaryans fonksiyonunu  ve  için hesaplayınız.

b)  zaman serisi durağan olacak şekilde , , ,  ve  üzerindeki koşulları belirleyiniz. Burada,  dir.

**5.6.3**  ler standart normal dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere AR(1) zaman serisi modeli  olarak verilmiştir. Bu modele uygun olduğu düşünülen  veri için  ve  gözlem değerleri verilmiştir.  için öngörü değerini  ve  için hesaplayınız. Hesapladığınız öngörüler için %95 lik güven aralıklarını yazınız.

**5.6.4** Bir önceki problemde (Problem 5.6.3)  ve  için  olasılıklarını hesaplayınız.

**5.6.5** Türkiye’nin 1981-1996 dönemi sanayi üretim indeks verileri (üçer aylık, yılda 4 defa) satırlar halinde aşağıda verilmiştir.

Verilere ait zaman serisi grafiği ile ACF ve PACF fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz. Verilere uygun modeli belirleyip model parametrelerini tahmin ediniz. ARCH veya GARCH etkisinin bulunup bulunmadığını araştırınız. Belirlediğiniz modelin durağanlığını %5 anlam düzeyinde test ediniz.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 49.7 | 44.1 | 50.2 | 55.9 | 51.9 | 50.9 | 55.8 | 67.3 |
| 59.5 | 55.5 | 57.7 | 68.9 | 62.8 | 59.8 | 64.1 | 77.9 |
| 61.3 | 63.6 | 66.4 | 80.4 | 64.4 | 67.0 | 74.6 | 87.2 |
| 72.8 | 75.8 | 80.9 | 101.3 | 82.5 | 80.0 | 83.3 | 93.9 |
| 81.1 | 77.7 | 86.6 | 97.4 | 85.6 | 85.5 | 93.2 | 106.7 |
| 88.1 | 88.1 | 99.6 | 109.8 | 92.0 | 91.9 | 103.2 | 112.9 |
| 94.5 | 95.3 | 107.1 | 114.4 | 100.6 | 102.2 | 109.4 | 117.8 |
| 98.7 | 102.6 | 107.1 | 112.6 | 101.4 | 98.6 | 107.0 | 124.3 |

**5.6.6** AR(2) modeline uygun olduğu düşünülen  veri satırlar halinde aşağıdadır.

**a)** Zaman serisi grafiği ile ACF ve PACF fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

**b)** Model parametrelerini SAS’da PROC REG ve PROC ARIMA ile ayrı ayrı hesaplayınız.

**c)** Serinin durağanlığını %5 anlam düzeyinde test ediniz.

**d)** Verilerin birinci derece farklarını hesaplayarak zaman serisi grafiği ile ACF ve PACF fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 25 | 28 | 35 | 43 | 48 | 56 | 68 | 79 | 94 | 99 |
| 105 | 106 | 106 | 106 | 104 | 89 | 77 | 73 | 60 | 53 |
| 42 | 40 | 42 | 38 | 36 | 40 | 40 | 45 | 53 | 66 |
| 70 | 69 | 60 | 62 | 61 | 55 | 51 | 50 | 50 | 54 |
| 55 | 54 | 59 | 59 | 58 | 59 | 60 | 68 | 67 | 80 |
| 95 | 110 | 123 | 135 | 154 | 170 | 180 | 189 | 192 | 201 |
| 196 | 186 | 187 | 182 | 174 | 163 | 156 | 153 |  |  |

**5.6.7**  ler standart normal dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenler ve  olmak üzere, AR(1) zaman serisi modeli  şeklinde verilmiş olsun.

**a)**  için  nin dağılımını bulunuz.

**b)**  için gözlem değerleri verildiğinde  nun EKK tahmin edicisini ve bu tahmin edicinin yakınsama hızını  ve  için elde ediniz.

**5.6.8**  ve  olmak üzere AR(1) zaman serisi modeli  şeklinde verilmiş olsun.

 **a)** Modeli  olacak şekilde matris formunda yazınız.  en küçük kareler tahmin edicisinin bileşenlerini ayrı ayrı hesaplayınız.

 **b)**  nın EKK tahmin edicisinin asimptotik dağılımını  hipotezi altında bulunuz.

 **c)**  nin EKK tahmin edicisi



olmak üzere  iken  olduğunu gösteriniz.

 **5.6.9** Aşağıdaki SAS kodlarını kullanarak 100 birimlik veri üretiniz. Bu verilerin zaman serisi grafiği ile ACF ve PACF fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz. Ürettiğiniz verilere uygun modeli belirleyiniz. Model parametrelerini SAS da PROC ARIMA ve PROC REG ile ayrı ayrı tahmin ediniz. Belirlediğiniz modelin durağanlığını %5 anlam düzeyinde test ediniz.  durağan olacak şekilde  tamsayısını belirleyiniz.

 **a)** data a; x3=0; x2=0; x1=0; n=100; do t=1 to n;

 x=2.9\*x1-2.8\*x2+0.9\*x3+normal(45673439); keep x t; output; retain;

 x3=x2; x2=x1; x1=x; end;

 **b)** data a; y2=0; y1=0; n=100; do t=1 to n;

 y=1.9\*y1-0.9\*y2+normal(379); keep y t; output; retain;

 y2=y1; y1=y; end;

 **5.6.10** Aşağıdaki SAS kodlarını kullanarak rasgele 100 birimlik veri üretiniz. Bu verilerin zaman serisi grafiği ile ACF ve PACF fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz. Ürettiğiniz verilere uygun modeli belirleyiniz. Model parametrelerini PROC ARIMA ve PROC REG ile tahmin ediniz. Belirlediğiniz modelin durağanlığını %5 anlam düzeyinde test ediniz.

 data a; n=100; y4=0; y3=0; y2=0; y1=0;

 do t=1 to n; y=y4+normal(7736367); keep y t; output; retain;

y4=y3; y3=y2; y2=y1; y1=y; end;