İNTEGRAL ÇARPANI

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

diferensiyel denkleminin Tam olmadığını kabul edelim. Bu denklem ile çarpıldığında, denklemi Tam diferensiyel yapan $\lambda = \lambda(x,y)$ çarpanına "İntegral çarpanı" adı verilir. İntegral çarpanı için ele alınacak bazı özel durumlar aşağıdaki gibidir;

I. Durum. Sadece x değişkenine bağlı İntegral çarpanının bulunması:

Eğer $\frac{P_y - Q_x}{Q} = f(x)$ şeklinde ise bu durumda verilen diferensiyel denklem sadece x değişkenine bağlı bir integral çarpanını kabul eder ve bu çarpan

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} dx = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

denkleminin çözümünden elde edilir.

II. Durum. Sadece y değişkenine bağlı İntegral çarpanının bulunması:

Eğer $\frac{P_y - Q_x}{-P} = f(y)$ şeklinde ise bu durumda verilen diferensiyel denklem sadece y değişkenine bağlı bir integral çarpanını kabul eder ve bu çarpan

$$\frac{P_y - Q_x}{-P} dy = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

denkleminin çözümünden elde edilir.

III. Durum. Sezgisel yolla integral çarpanının bulunması:

Bazı özel durumlarda eğer aşağıdaki tam diferensiyel özdeşlikler verilen denklemde varsa (ya da bazı düzenlemelerle elde edilebiliyorsa), diferensiyel denklem doğrudan tam diferensiyel hale getirilebilir ve bu haliyle integrali alınarak çözülebilir.

1. $xdx + ydy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2)$

2. $xdy + ydx = d(xy)$

3. $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$

4. $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$

5. $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d(\arctan \frac{y}{x})$

IV. Durum. $\lambda = \lambda(u(x, y))$ olmak üzere, u'nun bir fonksiyonu cinsinden integral çarpanının bulunması

Eğer, $\frac{P_y - Q_x}{Qu_x - Pu_y} = f(u)$ şeklinde ise verilen denklem $\lambda = \lambda(u)$ şeklinde yani u'nun bir fonksiyonu cinsinden bir integral çarpanı kabul eder ve bu çarpan da;

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{Qu_x - Pu_y} du$$

denkleminin çözümünden elde edilir.

Örnekler. Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin çözümlerini uygun bir integral çarpanı yardımıyla elde ediniz.

1. $(3y - 2x)dx + xdy = 0$ denklemi için,

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2}{x}$$

olduğundan integral çarpanı,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{2}{x} dx \Longrightarrow \lambda = x^2$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda verilen denklem integral çarpanı ile çarpılarak;

$$(3x^2y - 2x^3)dx + x^3dy = 0$$

şeklinde Tam diferensiyel denkleme dönüştürülür. Bu denklemin çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

2. $y^2dx + xydy = 0$ denklemi için

$$\frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{-1}{y}$$

olduğundan aranan integral çarpanı,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{y}dy \Rightarrow \lambda = \frac{1}{y}$$

dir. Gerçekten denklem $\lambda = \frac{1}{y}$ ile çarpıldığında,

$$ydx + xdy = 0$$

Tam diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü de

$$xy = c$$

dir.

3. $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$ denklemi sadece x'e veya sadece y'e bağlı integral çarpanını kabul etmez. Bu denklemde aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa sezgisel yolla integral çarpanı bulunabilir;

$$(ydx + xdy) + (x^2y^2dy - xy^2dx) = 0$$

$$d(xy) + x^2y^2\left(dy - \frac{1}{x}dx\right) = 0$$

denklem x^2y^2 ile bölünürse

$$\frac{d(xy)}{(xy)^2} + dy - \frac{1}{x}dx = 0$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. Doğrudan integral ile

$$\frac{-1}{xy} + y - lnx = c$$

genel çözümü bulunur. Burada integral çarpanının $\lambda = x^2y^2$ olduğuna dikkat ediniz.

4. $(2y - xy^2)dx + (2x + x^2y)dy = 0$ denkleminin çözümünü, xy'nin bir fonksiyonu cinsinden yani $\lambda = \lambda(xy)$ biçiminde bir integral çarpanı yardımıyla elde ediniz.

$xy = u$ denirse λ=λ(u)

olup

$$\frac{P_y - Q_x}{Qu_x - Pu_y} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{u}$$

dan aranan integral çarpanı

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-2}{u} du \Longrightarrow \lambda = u^{-2} \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{x^2 y^2}$$

biçiminde elde edilir. Çözüm okuyucuya bırakılmıştır.