Sturm-Liouville Sistemleri:

$$a_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_2(x)\frac{dy}{dx} + [a_3(x) + \lambda]\, y = 0$$

ikinci basamaktan lineer diferensiyel denkleminde,

$$p(x) = \exp\left[\int^x \frac{a_2(t)}{a_1(t)}dt\right] \quad , \quad q(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x) \quad , \quad s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)}$$

dönüşümlerini yaparak,

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + (q + \lambda s)\, y = 0$$

Sturm-Liouville denklemini elde ederiz. Bu denklem

$$L = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q$$

olmak üzere

$$L\,[y] + \lambda s(x)y = 0$$

olarak yazılabilir. Burada p, q ve s reel değerli, kapalı bir $[a, b]$ aralığında q ve s sürekli, p nin ise türevlenebilir fonksiyonlar olması gerekmektedir. Eğer p ve s fonksiyonları $[a, b]$ aralığında pozitif iseler, Sturm-Liouville denklemine düzgün Sturm-Liouville denklemi denir.

$$L\,[y] + \lambda s(x)y = 0 \quad , \qquad a \leq x \leq b$$

Sturm-Liouville denklemi,

$$\left.\begin{array}{l} a_1y(a) + a_2y'(a) = 0 \\ b_1y(b) + b_2y'(b) = 0 \end{array}\right\}$$

sınır koşulları ile birlikte bir Sturm-Liouville sistemi tanımlar. Burada a_1, a_2 ve b_1, b_2 ler reel sabitlerdir ve $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ ve $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ dır.

Tanım: Bir Sturm-Liouville sistemi için aşikar olmayan çözümler veren λ değerlerine özdeğer ve karşılık gelen çözümlere de özfonksiyonlar denir.

Örnek 1. Aşağıdaki $0 \leq x \leq \pi$ de tanımlı

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$
$$y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = 0$$

Sturm-Liouville sisteminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Denklem self-adjoint olup, p, q ve s reel değerli, $[0, \pi]$ aralığında p türevlenebilir, q ve s süreklidir. Ayrıca bu aralıkta p ve s pozitiftir. Bu durumda denklem düzgün Sturm-Liouville sistemidir.

Karakteristik denklemimiz,

$$r^2 + \lambda = 0$$

olmak üzere karakteristik denklemin kökleri,

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$$

bulunur.

i) $\lambda = 0$ olsun. Bu durumda $r_{1,2} = 0$ dır. Bu durumda (4) denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

elde edilir. Sınır koşulları uygulandığında

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Longrightarrow c_1 = 0 \\ y(\pi) &= 0 \Longrightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

olup $\lambda = 0$ için $y = 0$ aşikar çözümüne ulaşılır. Dolayısıyla $\lambda = 0$ bir özdeğer değildir ve karşılık gelen özfonksiyonda bulunamaz.

ii) $\lambda < 0$ olsun. Bu durumda $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$olup,

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

olarak bulunur. Sınır koşulları uygulandığında

$$
\begin{aligned}
y(0) &= 0 \Longrightarrow c_1 = -c_2 \\
y(\pi) &= 0 \Longrightarrow c_2 = 0
\end{aligned}
$$

olup $\lambda = 0$ için $y = 0$ aşikar çözümüne ulaşılır. Dolayısıyla $\lambda < 0$ bir özdeğer değildir ve karşılık gelen özfonksiyonda bulunamaz.

iii) $\lambda > 0$ olsun. Bu durumda $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$olup,

$$
y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)
$$

olarak bulunur. Sınır koşulları uygulandığında

$$
\begin{aligned}
y(0) &= 0 \Longrightarrow c_1 = 0 \\
y(\pi) &= 0 \Longrightarrow c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0
\end{aligned}
$$

dan $\lambda_n = n^2,\ n = 1, 2...$ özdeğerler olup, karşılık gelen öz fonksiyonlarda $\phi_n(x) = \sin(nx),\ n = 1, 2...$ olarak bulunur.

Periyodik Sturm-Liouville Sistemi

$p(a) = p(b)$ olmak üzere bir Sturm-Liouville sistemi

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda s(x))\, y = 0 \quad , \quad a \le x \le b \\
&y(a) = y(b) \quad , \quad y'(a) = y'(b)
\end{aligned}
$$

şeklinde verilmiş ise, ona Periyodik Sturm-Liouville Sistemi denir.

Örnek 2.

$$
\begin{aligned}
&y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad -1 \le x \le 1 \\
&y(-1) = y(1) \quad , \quad y'(-1) = y'(1)
\end{aligned}
$$

periyodik Sturm-Liouville sisteminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Burada $p(x) = 1$ olduğundan $p(-1) = p(1)$ sağlanır. $\lambda > 0$ için verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

olup sınır koşullarının uygulanmasıyla

$$\left(2\sin\sqrt{\lambda}\right)B = 0$$

ve

$$\left(2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right)A = 0$$

eşitliklerinin sağlanmalıdır. Aşikar olmayan bir çözüm elde etmek için

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0 \quad , \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

alınmalıdır.

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \quad , \quad n = 1, 2, 3, ...$$

öz değerleri bulunur be bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise $\{\cos nx\}$ ve $\{\sin nx\}$ dir.

$\lambda < 0$ için özdeğer ve özfonksiyon bulunamaz.

$\lambda = 0$ olduğu zaman $y(x) = 1$ sistemin aşikar olmayan bir çözümüdür.