Özfonksiyonlar ve Ortogonal Fonksiyon Uzayları:

Bir I aralığında reel değerli ve integrallenebilen herhangi iki fonksiyon $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ olsun. Eğer

$$(\phi, \psi) = \int_I \phi(x)\psi(x)\rho(x)dx = 0$$

sağlanıyor ise ϕ ve ψ fonksiyonlarına I aralığında $\rho(x) \geq 0$ ağırlık fonksiyonuna göre diktirler denir. $\phi = \psi$ alındığı zaman ϕ nin normunu

$$\|\phi\| = \left[\int_I \phi^2(x)\rho(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

elde ederiz.

Özfonksiyon Açılımları:

Herhangi bir düzgün

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + (q + \lambda s)\, y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{array}\right\}$$

Sturm-Liouville sisteminin özfonksiyonlar dizisi $\{\phi_k(x)\}$, $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar uzayında tamdır.

$[a, b]$ aralığında bir düzgün Sturm-Liouville sisteminin sınır koşullarını gerçekleyen herhangi bir parçalı düzgün f fonksiyonu mutlak ve düzgün yakınsak bir

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x)$$

seriye açılabilir. Burada c_n ler sabitlerdir. Serinin her iki yanını $\phi_m(x)\rho(x)$ ile çarpar ve I aralığında integre edersek c_k katsayıları

$$c_k = \frac{\int_I f\ \phi_k \rho dx}{\int_I \phi_k^2 \rho dx}$$

olarak bulunur.

Örnek 1. $f(x) = x$ fonksiyonunu

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$
$$y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = 0$$

Sturm-Liouville sisteminin özfonksiyonları cinsinden seriye açınız.

Çözüm:

Karakteristik denklemimiz,

$$r^2 + \lambda = 0$$

olmak üzere karakteristik denklemin kökleri,

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$$

bulunur.

$i)$ $\lambda > 0$ olsun. Bu durumda $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$olup,

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

olarak bulunur. Sınır koşulları uygulandığında

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Longrightarrow c_1 = 0 \\ y(\pi) &= 0 \Longrightarrow c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{aligned}$$

dan $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2...$ özdeğerler olup, karşılık gelen öz fonksiyonlarda $\phi_n(x) = \sin(nx)$, $n = 1, 2...$ olarak bulunur.

$\lambda \leq 0$ için özdeğer ve özfonksiyon yoktur.

$f(x) = x$ fonksiyonunu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

şeklinde seriye açalım.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{\int\limits_0^\pi x\sin(nx)dx}{\int\limits_0^\pi \sin^2(nx)dx}, \quad n=1,2... \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad n=1,2...
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

O halde istenilen seri,

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

olarak bulunur.