

4. RF DOĞRUSAL HIZLANDIRICILAR

4.1. EM Dalgalar İçin Dalga Kılavuzları

Elektromanyetik (e.m.) dalgaların iletiildiği ortamlar dalga kılavuzu olarak tanımlanır. Bir elektromanyetik dalga ışık hızı ile gerçekleşen ilerleme doğrultusuna dik elektrik ve manyetik alan bileşenleri içerir. Yayılma yönünde herhangi bir dalga bileşeni bulunmayan “**Enine Elektromagnetik (TEM) Dalgalar**” modunun yanı sıra, boyuna elektrik alan bileşenine sahip “**Enine Magnetik (TM) Dalgalar**” ve boyuna magnetik alan bileşenine sahip “**Enine Elektrik (TE) Dalgalar**” bulunmaktadır. **TM** ve **TE** modların her ikisi de, karakteristik kesilim frekansına (cut off frequency) sahiptir. Kesilim frekansının altındaki fiziksel bir mod uyarmak mümkün değildir.

Elektromanyetik dalgalarla parçacıkların etkileşimi incelenirken, em dalgaların yayılma doğrultusunda alan bileşenleri olmadığına dikkat edilmelidir. E.m. dalgaların silindirik veya dikdörtgen biçimli tüpler (kılavuzlar) içinde yayılım karakteristiklerini ve alan dağılım desenlerini belirlemek RF mühendisliğinin güncel konularındandır.

Hızlandırıcı alan bileşeni E_s için dalga denklemi, **Laplace Denklemi** ile verilir;

$$\nabla^2 E_s + \frac{\omega^2}{c^2} E_s = 0 \quad (4.1)$$

Bu denklemin çözümü şu şekildedir;

$$E_s = E_{0s} e^{i(\omega t - ks)} \quad (4.2)$$

Azimutal manyetik alan için benzer eşitlikler;

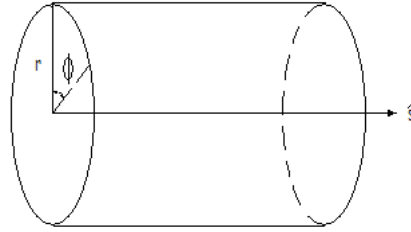
$$\nabla^2 H_\phi + \frac{\omega^2}{c^2} H_\phi = 0 \quad (4.3)$$

$$H_{\phi} = H_{0\phi} e^{i(\omega t - ks)} \quad (4.4)$$

şeklindedir.

4.2. Silindirik Dalga Kılavuzları

Elektromanyetik dalgalar, silindirik dalga kılavuzlarında uyarılabilir ve iletilebilirler.



Şekil 4.1. Silindirik RF kavite

Silindirik koordinatlarda, (r, θ, s) Diverjans ve Laplasyen şu şekilde ifade edilir:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial s} \hat{s} \quad (4.5)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \quad (4.6)$$

Azimut açısındaki (θ) periyodiklik n ise, $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = -n^2$ olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 E_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_s}{\partial r} + \left(k_c^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E_s = 0 \quad (4.7)$$

şeklindedir. 4.7 eşitliği Bessel diferansiyel denklemdir.

Burada k_c , kesilme dalga sayısıdır. E_s için diferansiyel denklemin çözümü Bessel fonksiyonları J_n ve Y_n cinsinden verilir.

$$E_s = AJ_n(k_c r) + BY_n(k_c r) \quad (4.8)$$

Burada n sayısı, Bessel fonksiyonunun derecesini belirtmektedir. Fonksiyonun özelliklerinden dolayı $r = 0$ 'da singülarite olmaması için, $B=0$ seçilir. J_n modü, sınır koşulları ile uyumlu n mod sağlar.

Enine alan bileşenleri $E_r, E_\theta, H_r, H_\theta$ benzer mod yapısı sağlamaktadır. Daha önce bahsedilen TM modü için (r, θ, s) koordinatlarındaki periyodiklik, TM_{npq} şeklinde ifade edilir. Buradaki indisler sırasıyla, r, θ, s koordinatlarındaki periyodikliği belirtmektedir. Verilen bir mod ve periyodiklik değeri belli sınır koşulları ve geometri için sağlanabilir.

$$\begin{aligned} E_s = E_\theta = 0 & \quad (r = a) \\ E_r = E_\theta = 0 & \quad (s = 0, s = l) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$n=0$ için çözüm bu şartları sağlarsa, azimutal periyodiklik yoktur.

Elektrik alan bileşenleri;

$$E_s = E_0 J_0(k_c r)$$

$$E_\theta = 0 \quad (4.10)$$

$$E_r = -i \frac{k}{k_c} E_0 J_0'(k_c r) e^{i(\omega t - ks)}$$

Manyetik alan bileşenleri;

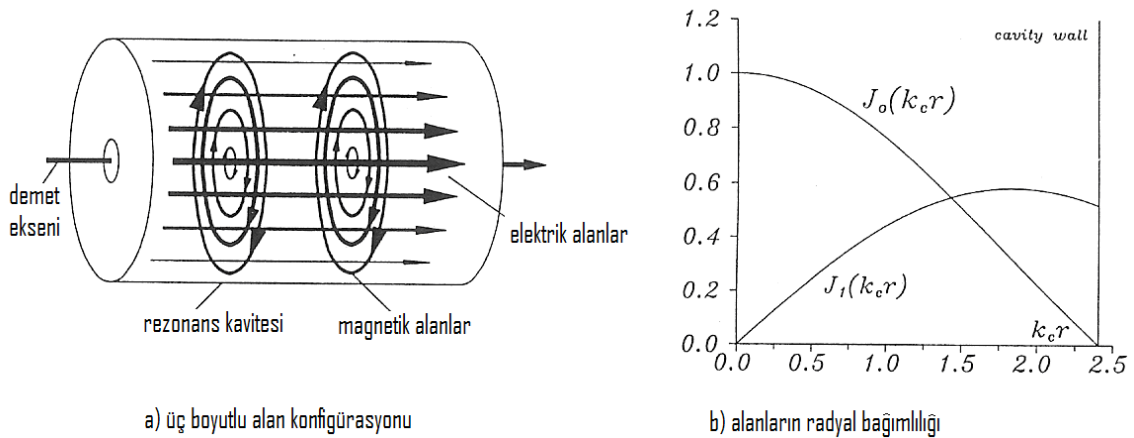
$$H_s = 0$$

$$H_\theta = -i \frac{\omega}{ck_c} E_0 J'_0(k_c r) e^{i(\omega t - ks)} \quad (4.11)$$

$$H_r = 0$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $J'_0(x) = \frac{\partial J_0(x)}{\partial x}$, $J'_0 = -J_1$ olarak verilir. Kavite duvarında $E_s=0$ olacaksa, $J_0(k_c a)=0$ olacağından, Bessel fonksiyonunun köklerinden $k_c a$ değeri bulunur.



Şekil 4.2. Silindirik kavite içinde TM_{010} modu alan desenleri

TM_{010} modu, s doğrultusunda radyal periyodikliğe sahip elektrik alanının varlığını belirtmektedir. Dalga kılavuzu boyunca üstel olarak azalan dalgalar yerine (kesilim dalga sayısının negatif olduğu durum), ilerleyen dalgalar elde etmek için, kesilim dalga sayısı pozitif olmalıdır.

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0 \quad (4.12)$$

Kesilim frekansı;

$$\omega_c = ck_c = c \frac{2.405}{a} \quad (4.23)$$

şeklinde verilir. Bilindiği gibi bu frekansın altındaki dalgalar, dalga kılavuzu boyunca yayılamamaktadır.

Dalga yayılım faktörü;

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \quad (2.24)$$

şeklindedir. Burada kesilim frekansını belirleyen a sayısı, $\lambda_c < a$ şartını sağlamalıdır.

İlerleyen dalganın fazı;

$$\psi = \omega t - ks = \text{sabit} \quad (4.14)$$

$$\dot{\psi} = 0 = \omega - k\dot{s} \quad (4.14)$$

$$v_{ph} = \dot{s} = \frac{\omega}{k} \quad (4.15)$$

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} > c \quad (4.16)$$

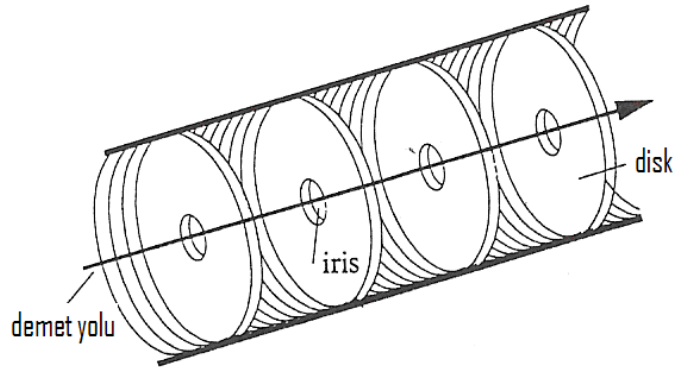
olur. Bu durum, parçacık hızlandırma açısından kararlı değildir. Dalgaların faz hızı, teorik olarak en fazla ışık hızına eşit olabilir.

Grup hızı ise, dalga kılavuzu boyunca dalgaların enerji taşıma hızıdır.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = c \frac{c}{v_{ph}} < c \quad (4.17)$$

RF kavite içerisinde etkin (pozitif enerji kazanımı) bir hızlandırma için yayılan dalganın faz hızı, parçacığın hızı ile aynı mertebede ($v_{ph} \approx v_p$) olmalıdır.

Disk yüklemeli dalga kılavuzu ile yayılan dalganın faz hızı, ışık hızına yakın olarak elde edilebilmektedir.



Şekil 4.3. Bir elektron lineer hızlandırıcısı için diskle bölmelenmiş dalga kılavuzu

4.3. Enerji Kazanımı

Kavite boyunca, alanın kazanım değişimi dikkate alınmalıdır. Parçacığın $t=0$ ' da hızlandırıcı kavitenin tam ortasında, v hızıyla ilerlediği varsayıldığında;

$$eV(t) = e\hat{V} \cos \omega t = e\hat{V} \cos\left(\omega \frac{s}{v}\right) \quad (4.18)$$

$$s = vt$$

olur. l_c uzunluklu kavite için enerji kazanımı:

$$\Delta E_{kin} = \int eV(t) dt \quad (4.19)$$

$$dt = \frac{ds}{v}$$

$$\Delta E_{kin} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{e \hat{V}_0}{l_c} \cos\left(\omega \frac{s}{v}\right) ds \quad (4.20)$$

şeklindedir. $l_c = \frac{\lambda_{rf}}{2}$ uzunluğundaki bir kavitede enerji kazanımı ise:

$$\Delta E_{kin} = e \hat{V}_0 \frac{\sin\left(\omega \frac{\lambda_{rf}}{4v}\right)}{\omega \frac{\lambda_{rf}}{4v}} \quad (4.21)$$

şeklinde olur.

Burada geçiş zaman faktörü;

$$T_t = \frac{\sin\left(\omega \frac{\lambda_{rf}}{4v}\right)}{\omega \frac{\lambda_{rf}}{4v}} \quad (4.22)$$

olarak tanımlanır.

- $v_p \ll v_{ph}$ ise geçiş zaman faktörü ve hatta kazanç negatif olabilir.
- Maksimum enerji kazanımı $T_t \sim 1$ için sağlanır.
- $T_t \sim 1$ değeri $v_p \sim c$ için sağlanır.
- $v_p \sim c$ ise $T_t \sim 1$ 'dir ve kinetik enerjideki değişim maksimumdur.
- Elektromanyetik dalgalar için $v_g = c$ 'dir.

4.4. Parçacık-Alan Etkileşimi ve Etkin Hızlandırma

Parçacığın alan tarafından yakalandığı faz değeri esasen kazanılan enerjiyi belirler ve etkin hızlandırma için parçacığın alanı ideal fazda (salınımın tepe noktasında) yakalaması istenir. Bu anlamda alan ile parçacık arasındaki eş fazlılık büyük önem taşır. Parçacıklar düşük enerji ile ($v_p \ll c$) enjekte edildiklerinde $v_{ph} \approx v_p$ koşulundan uzak olacaklarından, etkin bir hızlandırmadan da uzak olunacaktır. Etkin hızlandırma için parçacık hızı ve faz hızı eşit ya da birbirine çok yakın olmalıdır.

Parçacığın ve alanın bağıl hareketi laboratuvarından gözlemlendiğinde, Δt süresince, parçacık $\Delta s_p = v_p \Delta t$, alan ise $\Delta s_{ph} = v_{ph} \Delta t$ yolunu alacaktır. İki yol arasındaki fark faz farkı olarak ifade edilirse:

$$\Delta\psi = -k(\Delta s_{ph} - \Delta s_p) = -k(v_{ph} - v_p) \frac{\Delta s_p}{v_p} \quad (4.23)$$

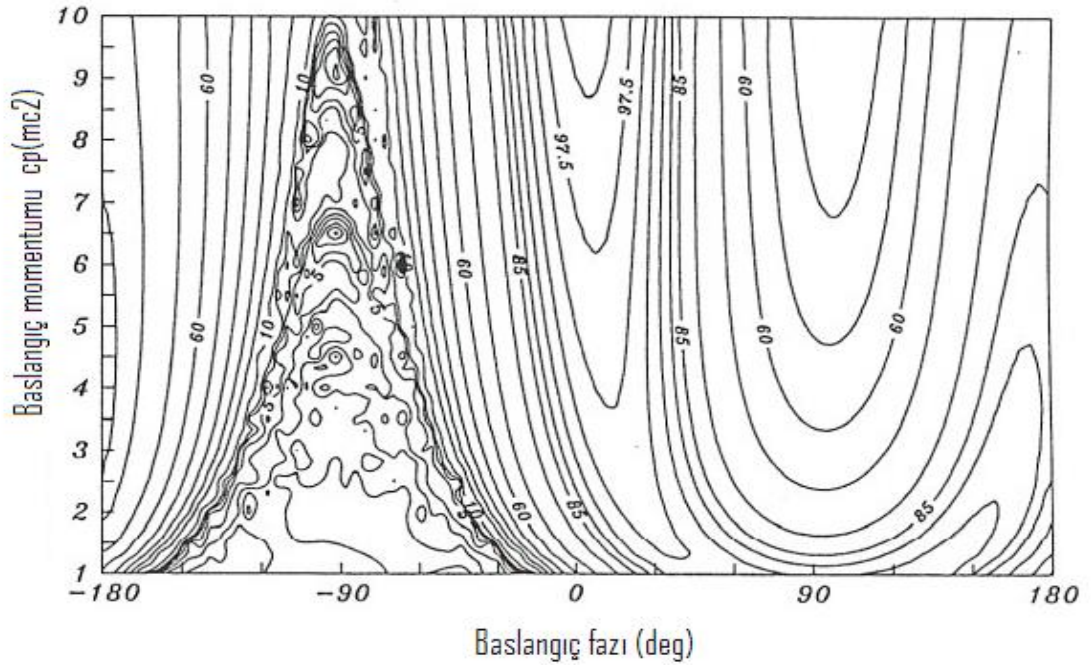
$$k = \frac{\omega}{v_{ph}} = \frac{2\pi c}{\lambda_{rf} v_{ph}} \quad (4.24)$$

$$\Delta\psi = -\frac{2\pi c}{\lambda_{rf}} \frac{v_{ph} - v_p}{v_{ph} v_p} \Delta s_p \quad (4.25)$$

bulunur. Parçacık ve alan arasındaki faz farkının sıfır olması için son eşitlikten görüldüğü gibi parçacık hızı ve alanın faz hızının birbirine eşit olması koşulu ortaya çıkar.

Parçacık ile alan arasındaki faz farkının fonksiyonu olarak başlangıç enerjisi cinsinden enerji kazanımı çizilecek olursa (Şekil 4.4) kontur çizgileri üzerindeki yüzdeler hangi faz değerinde enerjinin yüzde kaç kadar bir kazanım olduğunu vermektedir. Şekil 4.4'te verilen davranış ancak demetin boyuna hareketinde ortaya çıkan enerji ve faz farklılıkları arasında ortaya çıkan fark denklemlerinin sayısal analizi ile mümkün

olmaktadır ve analitik olarak yapılamaz. $\psi_0 = 0$ noktası hızlandırıcı dalgaının tepe noktasına denk gelmektedir.



Şekil 4.4. RF alan-parçacık etkileşmesinde başlangıç fazına bağlı olarak enerji kazanım davranışı

Problemler

Problem 1. Bir Van de Graaff hızlandırıcısında 5 MV gerilim farkı altında 1 A' lik bir yük akımı üretimi için harcanan minimum gücü bulunuz.

Problem 2. Aşağıdaki verilen parametreler için Wideroe lineer hızlandırıcısında ilk 4 sürüklenme tüpünün uzunluğunu sırasıyla elektronlar ve protonlar için hesaplayınız. Parçacıklar ilk tüpe 100 keV ile girmektedirler.

- Başlangıç enerjisi 100 keV
- RF boşluğu başına kazanılan enerji 1 MeV
- Alan frekansı 7 MHz

Problem 3. Fermilab Alvarez lineer hızlandırıcısında protonlar 200 MeV'lik kinetik enerjiye ulaşacak şekilde hızlandırılmaktadırlar. Protonların toplam enerjisini, momentumunu ve hızını ışık hızı cinsinden hesaplayınız.

Problem 4. Dalga kılavuzlarının kullanım amaçlarını ve genel özelliklerini tanımladıktan sonra, silindirik kavite içinde TE₀₀₁ modu için alan desenlerini belirleyiniz ve bu modun alanlarının hızlandırıcılarda kullanılıp kullanılmayacağını nedenleri ile birlikte irdeleyiniz.