8. ENİNE DEMET DİNAMİĞİ-II

8.1. Kapalı Form Çözümü

$$x'' + K(s)x = 0 \tag{8.1.}$$

K burada genelde periyodiktir. K(s+C)=K(s)

$$x = A\omega(s)\cos(\psi(s) + \delta) \tag{8.2.}$$

Genel çözüm δ ve A başlangıç koşullarından bulunabilir. W(s), C' nin periyodik bir fonksiyonudur.

$\psi = \sqrt{K}s$ ile $x = A\cos(\psi(s) + \delta)$ yazılabilir.

8.2. Courant-Snyder Parametreleri

$$\beta(s) = \frac{\omega^{2(s)}}{k} \quad (Genlik\ fonksiyonu)$$

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\frac{d\beta(s)}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^{2(s)}}{k}\right) \tag{8.3}$$

$$\gamma \equiv \frac{1+\alpha^2}{\beta}$$

$$\Delta\psi_s = \int_{s_0}^{s_0+c} \frac{ds}{\beta(s)} \tag{8.4}$$

$$x = A\omega(s)\cos(\psi(s) + \delta) \tag{8.5}$$

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos[\psi(s) + \delta] \tag{8.6}$$

Eşitlik 8.6 enine salınımlar için x yönündeki en genel çözümü veriri. Burada k, A' nın içinde kabul edilir.

$$\Delta\psi(s_1 \to s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\beta(s)} \tag{8.7}$$

Özel olarak dairesel hızlandırıcılar için, tur başına salınım sayısı;

$$v = \frac{1}{2\pi}\int \frac{ds}{\beta(s)} \tag{8.8}$$

eşitliğinden bulunur.

$\beta(s)$ genlik fonksiyonudur, önemli bir parametredir ve tune (ayar) olarak bilinir.

8.3. Emittans (Yayınım)

Enine salınımlar (Betatron salınımları) için çözüm x yönünde;

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos[\psi(s) + \delta] \tag{8.9}$$

ile ifade edilmişti.

A, trigonometrik fonksiyonlar elenerek x ve x' cinsinden bulunabilir. x, x'in türevi ve C-S parametreleri kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilebilir:

$$\alpha(s)x(s) + \beta(s)x^{'}(s) = -A\sqrt{\beta(s)}\sin[\psi(s) + \delta]$$

ve bu eşitliğin ve eşitlik 8.9'un kareleri toplanacak olursa:

$$A^2 = \gamma(s)x(s)^2 + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'(s)^2 \tag{8.10}$$

elde edilir. A^2 bir C-S değişmesi olup, aynı zamanda bir harmonik salınıcının toplam enerjisinin karesidir. Hızlandırıcının herhangi bir konumunda bu değişmez form şekildeki gibi bir elipsin alanını temsil edecektir. Yönelim değişecek ancak A aynı kalacaktır.

Analitik geometride genel elips denklemi;

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \tag{8.11}$$

Elipsin alanı;

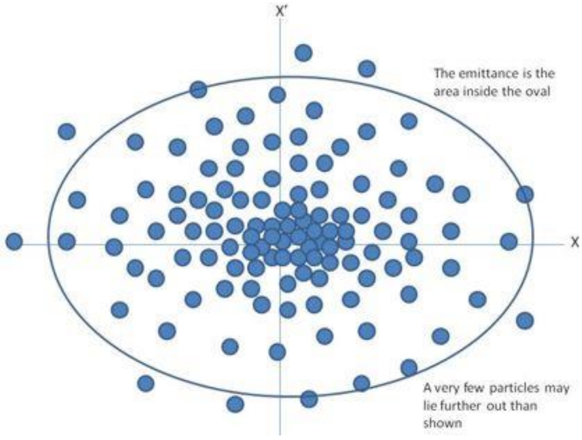
$$A^2 = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \tag{8.12}$$

$$\frac{\pi d}{\sqrt{ac - b^2}} \tag{8.13}$$

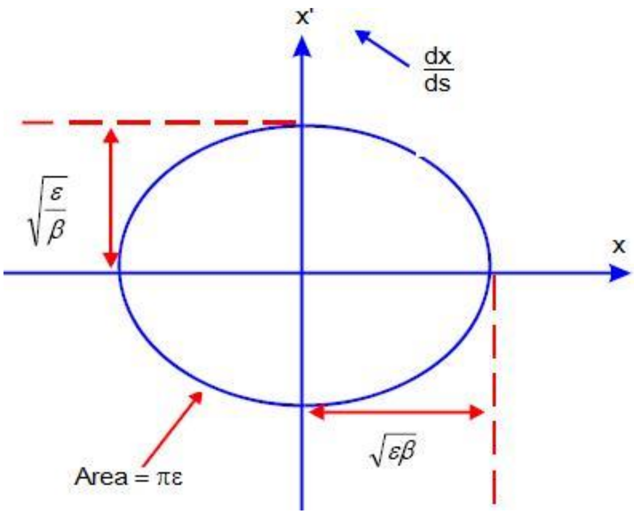
$A^2 = d$
$a = \gamma$ $\quad\Rightarrow$
$b = \alpha$
$c = \beta$

$$alan = \frac{\pi A^2}{\sqrt{\beta\gamma - \alpha^2}} = \pi A^2 \equiv \varepsilon \tag{8.14}$$

şeklindedir. ε demetin faz uzayındaki alanının bir ölçüsüdür ve EMİTTANS (yayınım) olarak bilinir.



Şekil 4. 7: Faz uzayında demetin kapladığı eliptik alan



Şekil 4. 8: Elipsin eksen uzunlukları ve alanı

4.2.8 Admittans

Özellikle kinetik etkiler altında faz uzayında tanımlanan bu elipsin alanı (yayınım) zamanla büyüme eğilimindedir. Admittans, emittansın alabileceği en büyük değerdir. Herhangi bir noktada x için en büyük değer;

$$x = A\sqrt{\beta} \tag{8.15}$$

Yarı genişlik $a(s)$ olmak üzere, minimumun konumu ise;

$$\frac{a(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \tag{8.16}$$

şeklindedir. O halde admittans;

$$\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{\beta}}\right)_{min} \tag{8.17}$$

söz konusu minimum değeri maximum β'ya eşit olur. Bu durumda,

$$admittans = \frac{\pi a^2}{\beta_{max}} \tag{8.18}$$

şeklinde tanımlanır.

Kapalı yörünge boyunca, herhangi bir noktada maksimum yer değiştirme ve eğim için;

$$x_{max} = \sqrt{\frac{\varepsilon\beta_{max}}{\pi}} \qquad x_{max} = \sqrt{\frac{\varepsilon\gamma_{max}}{\pi}} \tag{8.19}$$

elde edilir.

Momentum (p) değişiyorsa;

$$x'' + \frac{p'}{p}x' + \frac{e\beta}{p}x = 0$$

$$x = A_0\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{2}}(s)\cos[\psi(s) + \delta] \tag{8.20}$$

enerji arttıkça, genlik adyabatik olarak düşer ve dolayısıyla emittans etkilenir.

$$\varepsilon_t = \sim \frac{1}{p} \sim \frac{1}{E} \tag{8.21}$$

Kinematik etkileri içine alan ve hızlandırıcı boyunca değişmez kalan normalize yayınım (emittans)

$$\varepsilon_N = \varepsilon_t \left(\gamma \frac{v}{c}\right) \tag{8.22}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Emittansın birimi mrad'dır ancak hızlandırıcı literatüründe genelde mmmrad cinsiden ifade edilir ve çoğu zamanda başında pi çarpanını bulundurur.

Günümüzde nmrad mertebesinde enine emittans değerine sahip olan demetler elde edilebilmekte ve bunlar "nano beam" olarak anılmaktadırlar.