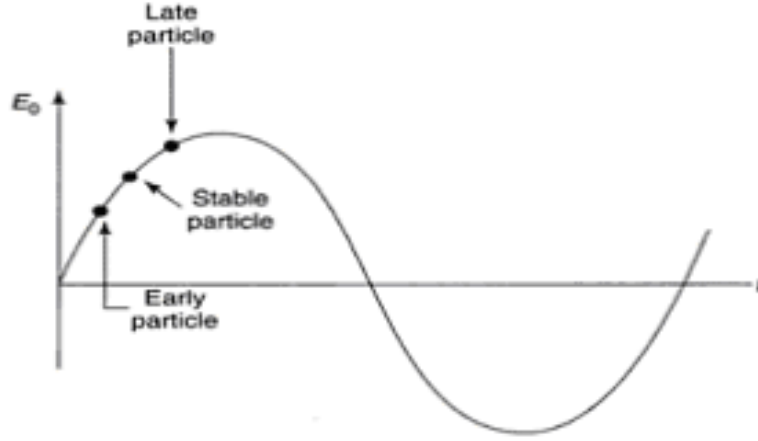


9. BOYUNA DEMET DİNAMIĞI

9.1. Giriş

Bir doğrusal hızlandırıcı, hızlandırıcı alan ile eş-fazlı hareket eden parçacığa göre tasarlanır ve bu parçacığa senkronize parçacık denir. Kabul edilebilir bir demet yoğunluğuna göre, hızlandırıcı alan bu senkronize parçacık çevresindeki parçacıklar için bir geri çağırıcı kuvvet oluşturur ve senkronize parçacık etrafındaki parçacıklar kararlı bir yörüngede hareket eder. Boyuna geri çağırıcı kuvvetler ancak parçacıklar zamanla değişen bir alan ile hızlandırıldığında yaratılabilir ve bu geri çağırıcı kuvvetler senkronize parçacık etrafında enerji-faz salınımları oluşturur.



Şekil 9.1. Enerji-zaman faz uzayında üç farklı fazdaki parçacığın konumları

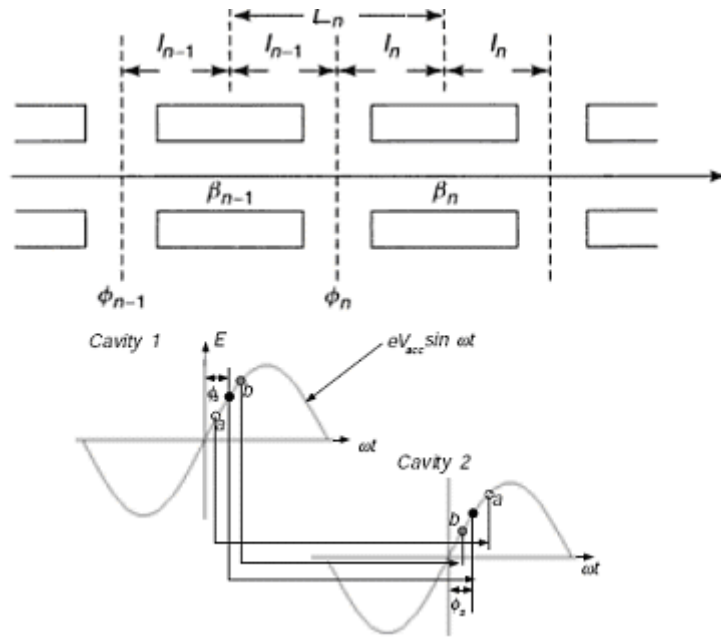
Bir elektron doğrusal hızlandırıcısında elektronlar çok kısa sürelerde rölativistik hızlara ulaşır ve faz salınımları azalır. Bir başka deyişle elektronlar ani bir şekilde salındırıcı dalgasının hızına yaklaşır ve yeterli enerjiye ulaştıktan sonra yol boyunca sabit kalan bir fazda hareket eder. Sabitlenmiş fazdaki elektronların enerjisi fazın değerine ve hızlandırıcı alana bağlı olarak değişir.

Boyuna odaklama hızlandırıcı dalganın tepesine yakın bölgede seçilen faz seçimi ile sağlanabilir. Şekil 9.1'de görüldüğü gibi zamanla artan bir alan yamacında olan bir senkronize parçacık seçilirse diğer parçacıklar için bir geri çağırıcı kuvvet oluşturulabilir. Senkronize parçacık hızlandırıcı oyuğa $t_s = \phi_s / \omega$ süresinde ulaşır ve

$\Delta E = eV_{acc} \sin \varphi_s$ enerjisini kazanır. Burada φ_s senkronize faz, V_{acc} hızlandırıcı gerilimi ve ω da RF dalgasının açısal frekansıdır. Bu durumda erken (early) parçacıklar senkronize parçacığa göre daha az, geç (late) parçacıklar ise daha fazla enerji kazanacaktır. Böylece hızlandırılan parçacıklar, senkronize parçacık etrafında kararlı paketler halinde kalacaktır.

9.2. Boyuna Hareketin Diferansiyel Denklemleri

n . hücresi senkronize faz φ_{sn} , referans parçacığının kazandığı enerji ΔE_{sn} ve senkronize hız β_{sn} için tasarlanmış Şekil 9.2'deki gibi bir sürüklenme tüpü ve hızlandırıcı oyuklarını ele alalım. n . hücre içinde tekil bir parçacığın fazını, enerjisini, enerji değişimini ve hızını sırasıyla $\varphi_n, E_n, \delta E$ (ΔE) ve β_n ile tanımlayalım.



Şekil 9.2. Boyuna hareketi açıklamak için hızlandırıcı hücrelerin ve parçacıkların konumları

Senkronize koşulunun sağlanması için RF oyukları arası mesafe;

$$2\ell_n = h\beta_{sn}\lambda \quad (9.1)$$

kadar; oyukların orta noktaları arasındaki mesafe ise

$$L_n = \frac{N(\beta_{s,n-1} + \beta_{s,n})\lambda}{2} \quad (9.2)$$

kadar olmalıdır.

Burada λ RF alanının dalga boyu, h harmonik sayısıdır ve N π -mod doğrusal hızlandırıcı için $\frac{1}{2}$, 0-mod doğrusal hızlandırıcı için 1 değerini alır*. Eğer hızlandırıcı oyukları birbirinden ayrı yapılar ise harmonik sayısı dikkate alınır. Bununla beraber eğer hızlandırıcı yapı aynı oyuk üzerindeki hücreler ise N sayısı hesaba katılır.

Şekil 9.2'de açıklandığı gibi hızlı parçacık a , oyuğa $t_a < t_s$ süresinde ulaşır ve $\Delta E_a < \Delta E_s$ kadar enerji kazanır, parçacık b , oyuğa $t_b > t_s$ süresinde ulaşır ve $\Delta E_b > \Delta E_s$ kadar enerji kazanır ve senkronize parçacık RF alanıyla ideal şekilde salınır ve diğer oyuğa φ_s fazında ulaşır. Parçacıklar ikinci oyuğa ulaştıklarında a parçacığı geç parçacık, b parçacığı ise erken parçacık olur. Bu faz salınımına ise **sinkrotron salınımı** adı verilir.

Şekil 9.2'ye tekrar dönersek, $n-1$ açıklığından n açıklığına gelen parçacıklar sabit bir enerjiye sahiptir. RF fazı ise ilerleyen parçacıklarla birlikte,

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \omega \frac{2\ell_{n-1}}{\beta_{n-1}c} + \begin{cases} \pi & \pi - \text{mod hızlandırıcı için} \\ 0 & 0 - \text{mod hızlandırıcı için} \end{cases} \quad (9.3)$$

olarak verilir. Burada yarı hücre boyu $l_{n-1} = N\beta_{s,n-1}\lambda/2$ ile verilir. N π -mod doğrusal hızlandırıcı için $1/2$, 0-mod doğrusal hızlandırıcı için 1 değerini alır. $n-1$ hızlandırma açıklığından (hücre) n . oyuğa gelen tekil parçacıkların senkronize parçacığa göre fazındaki değişme;

$$\Delta(\varphi - \varphi_s)_n = \Delta\varphi_n - \Delta\varphi_{s,n} = 2\pi N\beta_{s,n-1} \left(\frac{1}{\beta_{n-1}} - \frac{1}{\beta_{s,n-1}} \right) \quad (9.4)$$

olarak bulunacaktır. $\delta\beta \ll 1$ için parantez içindeki terim Taylor serisine açılırsa;

$$\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_s} \right) \approx -\frac{\delta\beta}{\beta_s^2} \quad \text{ve} \quad \delta\beta = \frac{\delta E}{mc^2\gamma_s^3\beta_s} \quad (9.5)$$

kinematik denkliği kullanarak;

$$\Delta(\varphi - \varphi_s)_n = -2\pi N \frac{E_{n-1} - E_{s,n-1}}{mc^2\gamma_{s,n-1}^3\beta_{s,n-1}^2} \quad (9.6)$$

şeklinde referans faza göre değişen fazı ilişkilendiren bir diferansiyel denklem elde edilir. Diğer yandan senkronize parçacığa göre diğer tekil parçacığın kazandığı enerji farkı eşitliği;

$$\Delta(E - E_s)_n = \Delta E - \Delta E_{s,n} = qV(\sin\varphi_n - \sin\varphi_{s,n}) \quad (9.7)$$

şeklinde yazabilir. Burada, q parçacığın yükü ve E_0 hızlandırıcı oyuk içinde salınan alanın genliği, T ; geçiş zaman faktörü olmak üzere

$$V = E_0TL_n \quad (9.8)$$

hızlandırma gerilimidir. Salınan alanların sıçramalı yapısını sürekli alan olarak ele alıp, n de sürekli değişken olarak tanımlanırsa (gerçekte hızlandırıcı oyuk sayısı) alınıp;

$$\Delta(\varphi - \varphi_s) \rightarrow \frac{d(\varphi - \varphi_s)}{dn} \quad \text{ve} \quad \Delta(E - E_s) \rightarrow \frac{d(E - E_s)}{dn} \quad (9.9)$$

değişkenlerini tamamlanır.

Eksensel uzunluk $s = nN\beta_s\lambda$ tanımıyla Eşitlik 9.6 ve 9.7 sırasıyla;

$$\gamma_s^3 \beta_s^3 \frac{d(\varphi - \varphi_s)}{ds} = -2\pi \frac{E - E_s}{mc^2 \lambda} \quad \text{ve} \quad \frac{d(E - E_s)}{ds} = qE_0 T [\sin\varphi - \sin\varphi_s] \quad (9.10)$$

halini alır. Böylece Eşitlik 9.10'u birleştirerek;

$$\frac{d}{ds} \left[\gamma_s^3 \beta_s^3 \frac{d(\varphi - \varphi_s)}{ds} \right] = -2\pi \frac{qE_0 T}{mc^2 \lambda} (\sin\varphi - \sin\varphi_s) \quad (9.11)$$

elde edilir ve daha açık bir şekilde;

$$\gamma_s^3 \beta_s^3 \frac{d^2(\varphi - \varphi_s)}{ds^2} + 3\gamma_s^2 \beta_s^2 \left[\frac{d}{ds} (\gamma_s \beta_s) \right] + 2\pi \frac{qE_0 T}{mc^2 \lambda} (\sin\varphi - \sin\varphi_s) = 0 \quad (9.12)$$

eşitliği yazılabilir. Eşitlik 9.12 faz hareketi için doğrusal olmayan ikinci dereceden bir diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Negatif faz, erken parçacığın RF dalgasının tepesine erken ulaşması anlamına gelir ve uzaysal parçacık koordinatları arasında,

$$z - z_s = c(t - t_s) = -\frac{\beta_s \lambda}{2\pi} (\varphi - \varphi_s) \quad (9.13)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Hızlandırıcı oranını küçük olarak değerlendirsek $E_0 T$, φ_s ve β_s değerleri sabit alınabilir. Ayrıca,

$$\omega \equiv \delta\gamma = \frac{E-E_s}{mc^2}, \quad A \equiv \frac{2\pi}{\beta_s^3 \gamma_s^3 \lambda} \quad \text{ve} \quad B \equiv \frac{qE_0 T}{mc^2} \quad (9.14)$$

tanımları yapıldığında Eşitlik 9.11 ve 9.12 sırasıyla;

$$\omega' \equiv \frac{d\omega}{ds} = B(\sin\varphi - \sin\varphi_s), \quad \varphi' \equiv \frac{d\varphi}{ds} = A\omega \quad (9.15)$$

$$\varphi'' \equiv \frac{d\varphi'}{ds} = -AB(\sin\varphi - \sin\varphi_s) \quad (9.16)$$

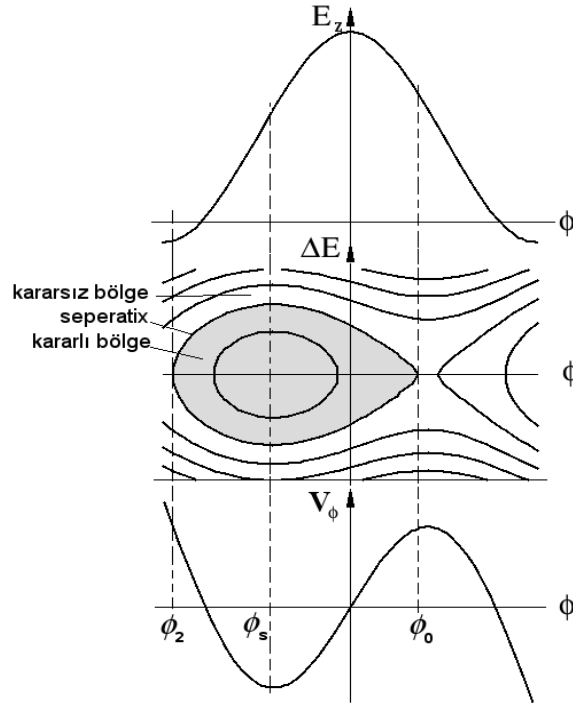
halini alacaktır. Burada $AB = 2\pi qE_0 T / mc^2 \beta_s^2 \gamma_s^2 \lambda$ ' dir. Eşitlik 9.16'nın integralini alırsak;

$$d\varphi' = -AB(\sin\varphi - \sin\varphi_s) ds \quad (9.17)$$

ifadesini elde ederiz. $\varphi' = d\varphi / ds$ tanımını kullanarak Eşitlik 9.17'yi , φ' ile çarpıp 9.15 de yerine yazarsak;

$$\frac{A\omega^2}{2} + B(\cos\varphi - \varphi \sin\varphi_s) = H_\varphi \quad (9.18)$$

ifadesini elde ederiz. Burada H_φ integrasyon sabitidir ve Hamiltonyen olarak adlandırılır. Denklem 9.14'ün ilk terimi kinetik enerji terimi ve ikinci terim ise potansiyel enerji olarak adlandırılır. Kolaylıkla gösterilebileceği gibi $-\pi/2 < \varphi_s < \pi/2$ aralığında bir potansiyel kuyusu vardır. Eğer $-\pi \leq \varphi_s \leq 0$ aralığında bir hızlandırma varsa, hızlandırma ve potansiyel kuyusu $-\pi/2 \leq \varphi_s \leq 0$ aralığında yer alacaktır. Faz hareketinin kararlı bölgesi $\varphi_2 \leq \varphi \leq -\varphi_s$, $H(\varphi_2) = H(-\varphi_s)$ denkleminin φ_2 ifadesi için sayısal çözümünden bulunabilir. Şekil 9.11 boyuna faz uzayı ve potansiyel kuyusunu göstermektedir.



Şekil 9.11. Boyuna faz uzayı ve potansiyel kuyusu

Görüldüğü gibi potansiyelin maksimum değeri $\varphi = \varphi_s$ ' te bulunmaktadır. Potansiyelin maksimum değeri için $\varphi' = 0$ ve Eşitlik 9.15'e göre $w = 0$, dolayısıyla $\varphi = -\varphi_s$ için $B[-\cos(-\varphi_s) - (-\varphi_s \sin \varphi_s)] = H_\varphi$ olacaktır, böylece seperatix (ayırıcı) üzerindeki noktalar,

$$\frac{A\omega^2}{2} - B(\cos\varphi - \varphi \sin\varphi_s) = -B[\cos(\varphi_s) - (\varphi_s \sin\varphi_s)] \quad (9.19)$$

denklemini sağlamalıdır. Ayırıcı parçacıkların kararlı kalabileceği bölgeyi belirler. Şekil 9.11' de sabit A ve B katsayıları için çizilmiş boyuna faz uzayında seperatix içerisinde kalan parçacıklar kararlı faz salınımı yapacaktır. Hızlandırıcı literatüründe seperatix (**ayırıcı**) olarak da adlandırılır ve ayırıcının sınırladığı alan da bucket (kanat) olarak adlandırılır. Eşitlik 9.15'e tekrar dönülürse;

$$\varphi_s = \omega t_s, \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad \Delta E = E - E_s, \quad \Delta t = t - t_s, \quad E_s = \gamma m c^2 \quad (9.20)$$

$$\eta_c = -1/\gamma^2$$

bağıntılarını kullanarak;

$$\frac{d(\Delta t)}{ds} = \frac{\eta_c}{E_s \beta_s^3 c} \Delta E \quad ve \quad \frac{d(\Delta E)}{ds} = q E_0 T [\sin \varphi - \sin \varphi_s] \quad (9.21)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu iki denklemi birleştirirsek;

$$\frac{d^2}{ds^2} [\Delta t] = \frac{\eta_c q E_0 T}{E_s \beta_s^3 c} [\sin \varphi - \sin \varphi_s] + \Delta E \frac{1}{c} \frac{d}{ds} \left[\frac{\eta_c}{E_s \beta_s^3} \right] \quad (9.22)$$

ifadesini elde ederiz. Senkronize parçacığın enerjisi ve hızındaki değişim senkronize olmayan parçacıklara göre çok düşükse denklemin sağındaki terim ihmal edilebilir.

9.3. Küçük Genlikli Sinkrotron Salınımları ve Faz Kararlılığı

Küçük genlikli salınımla anlatılmak istenen senkronize fazdan olan çok küçük sapmalardır. Senkronize parçacığın enerjisi ve hızındaki değişim senkronize olmayan parçacıklara göre çok düşükse Eşitlik 9.22'nin sağındaki terim ihmal edilebilir ve senkronize parçacıktan sapmalar çok küçük ise $(\varphi - \varphi_s \ll 1)$ $\sin \varphi - \sin \varphi_s$; $\omega \Delta t \cos \varphi_s$ denkliği ile,

$$\frac{d^2}{ds^2} [\Delta t] + (2\pi Q_s)^2 \Delta t = 0 \quad (9.23)$$

şeklinde basit bir doğrusal diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem hızlandırıcı yapı dizisi içerisinde hızlandırılan parçacıkların senkronize parçacık civarında hem enerji hem de zaman koordinatlarında küçük genlikli salınımlarını açıklar.

Buradaki Q_s^2 ;

$$Q_s^2 = - \frac{q \eta_c E_0 T \cos \varphi_s}{2\pi E_s \beta_s^3 \lambda} \quad (9.24)$$

ile verilir ve küçük genlikli sinkrotron salınımı ayarı olarak adlandırılır. Q_s^2 , hızlandırıcı oyukları arasında sinkrotron salınımlarının sayısını verir. Eğer eksensel konum s yerine demet örgüsü üzerinde konumlandırılmış ($n = s/h\beta_s\lambda$) n . hızlandırıcı yapıya göre Eşitlik 9.23 ve 9.24 yeniden yazılacak olursa;

$$\frac{d^2}{dn^2} [\Delta t] + (2\pi Q_{s,n})^2 \Delta t = 0 \quad ve \quad Q_s^2 = -\frac{q\eta_c hV \cos\varphi_s}{2\pi E_s \beta_s^2} \quad (9.25)$$

olacaktır. Burada h harmonik sayısı olup hızlandırma alanının duran ya da sürüklenen dalga olma özelliğinden bağımsız tamsayıdır. Eşitlik 9.23 veya 9.25'in kararlı bir çözümü olabilmesi için Q_s ' in reel olması zorunludur. Bir linak için momentum sıkıştırma faktörünün $\eta_c = -1/\gamma_s^2$ olduğunu tekrar hatırlarsak; kararlı faz aralığı $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ olacaktır ve aralıkta faz denklemi basit harmonik harekete benzeyecektir. Eşitlik 9.21 ve 9.23' ü kullanarak çözersek;

$$\Delta t = \Delta t_0 \cos(2\pi Q_s s) + \Delta E_0 \frac{\eta_c}{2\pi Q_s E_s \beta_s^3 c} \sin(2\pi Q_s s)$$

$$\Delta E = \Delta E_0 \cos(2\pi Q_s s) + \Delta t_0 \frac{2\pi Q_s E_s \beta_s^3 c}{\eta_c} \sin(2\pi Q_s s) \quad (9.26)$$

olacaktır. Denklem 9.26 matris formunda yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta E \end{pmatrix} \Big|_s = \begin{pmatrix} \cos(2\pi Q_s s) & \beta_L \sin(2\pi Q_s s) \\ \frac{-1}{\beta_L} \sin(2\pi Q_s s) & \cos(2\pi Q_s s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta E \end{pmatrix} \Big|_0 \quad (9.27)$$

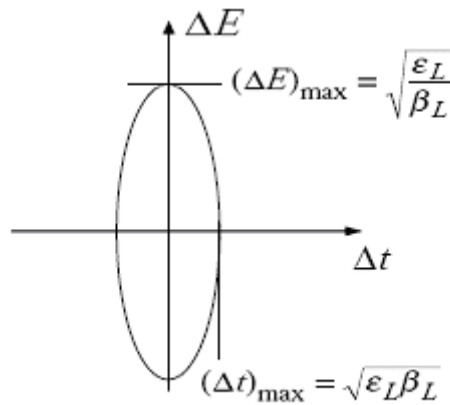
ifadesi elde edilir. Burada enine harekete benzer şekilde β_L boyuna beta fonksiyonu;

$$\beta_L = \frac{|\eta_c|}{2\pi Q_s E_s \beta_s^3 c} = \frac{1}{\beta_s c} \sqrt{\frac{\eta_c \lambda}{2\pi q \beta_s E_s E_0 T \cos \varphi_s}} \quad (9.28)$$

olarak tanımlanabilir. Yine, enine harekete benzer şekilde Denklem 9.27'yi kullanarak bir boyuna hareket sabiti tanımlarsak;

$$\frac{1}{\beta_L} (\Delta t)^2 + \beta_L (\Delta E)^2 = \text{sabit} = \varepsilon_L \quad (9.29)$$

olacaktır. Burada, ε_L boyuna emittans olarak adlandırılır. Boyuna faz uzayı Eşitlik 9.29'dan görüleceği gibi ΔE ve Δt değişkenleri ile belirlenir. Boyuna faz uzayının şematik görünümü Şekil 9.12' de verilmiştir ve elipsin alanı $\pi \varepsilon_L$ ' dir.



Şekil 9.12. Boyuna faz uzayı ve elipsin boyutları

Parçacıklardan oluşan bir demetin emittansı;

$$\varepsilon_{z,rms} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N t_i^2 \sum_{i=1}^N E_i^2} \quad (9.30)$$

ile enine harekete benzer şekilde hesaplanır.